

離散数学 1 日本語訳
教官 柴田
作成開始 2009 年 2 月 12 日
完成 2009 年吉日

学籍番号 : 06306901
氏名 : 青池 祐香

- 「Discrete Mathematics」より
- ~ 2009 年度 離散数学 1 の教科書に対応
- なるべく教科書通りの和訳
- エクササイズは略
- 元の教科書でのボールドとイタリックは太字に

1 命題と証明

1.1 数学的な命題

以下の命題は数学者によって研究された、典型的な例である。それぞれの文章の前に置かれている黒丸には重要な意味合いはなく、単に文章の区切りをはっきりさせるためのものである。

- 15 は 3 の倍数である
- 20 は 3 の倍数である
- 200000000 は 5 の倍数である
- 200000000 は 263 の倍数である
- 200000000 は完全数である
- $2^{67} - 1$ は素数である

すぐに、2 つのなすべきことがあることがわかるだろう。まず最初に、命題が何について言っているのかを理解すること。次に、その命題が真か偽か決定することである。

命題は「整数」、または私たちが自然数と呼ぶものに関したものであることは明確である。これらは通常、記号 1、2、3、4 など で表す。既にそれらの基礎特性に詳しいとして、本書ではこれらの特性を既知のものとして扱っていく。4 章では、この論点に戻り、自然数に関して何を仮定するかを議論する。

「15 は 3 の倍数である」という命題について考えてみよう。掛け算で「3 の段」を歌ったことは覚えているだろう。 5×3 は 15 である。真の命題は定理として知られ、その命題が真である理由を証明という。

定理 15 は 3 の倍数である。

証明 $15 = 5 \times 3$ □

□ は証明の終わりを意味する。

次に「20 は 3 の倍数である」という命題を考えてみる。これは偽である。再び 3 の段について思い出してみると、3 の倍数のこのリストの中に 20 は含まれていない。21 などのような、より大きな数は含んでいる。よって、命題は定理ではない。このような場合、定理と証明の方式での表現が難しくなる。よって、「ではない」という言葉を命題の中に挿入する。すると、真の命題を得ることができる。

定理 20 は 3 の倍数ではない。

証明 もし 20 が 3 の倍数なら、 $n \times 3 = 20$ となる自然数 n が存在するはずである。 $7 \times 3 = 21$ なので、 n は 7 よりも小さい。しかし、1~6 のどの数字でも $3 \times n = 20$ とならない。したがって、命題は真。 □

1.2 数学をする方法

省略。

1.3 複合命題

以下にいくつかの命題を述べる。

- 81270 は 2 と 5 の倍数である
- 81270 は 3 または 7 の倍数である
- もし 200000000 が 5 の倍数なら、400000000 も 5 の倍数である
- もし 200000000 が 375 の倍数なら、400000000 も 375 の倍数である

これらは複合命題と呼ばれる。簡単な命題を、連結させる言葉を用いて構成している。例えば、最初の命題は、次の 2 つの命題から成っている。

- 81270 は 2 の倍数である
- 81270 は 5 の倍数である

3 章では、もっと深く言及する。

定理 81270 は 2 と 5 の倍数である。

証明 $81270 = 40635 \times 2$ 、 $81270 = 16254 \times 5$ $\square$

2 つ目の命題は、次のように書き換えられる。

- 81270 は 3 の倍数である または、81270 は 7 の倍数である

ここで、「または」の意味に関して問題が生まれる。通常の方法に従えば、どちらかが真であるなら複合命題は真である。しかし、それらの両方が真である場合、どうなるだろうか？ある状況において、「または」という単語は代替手段が『私は月曜日から火曜日に退屈な講義をするつもりです』というように、他のものの両方が許されているが、『私は月曜日から火曜日に最も良い講義をするつもりだ』というように、1 つの選択肢だけが許されていることを示す。数学においては、これらの意味を明確にすることが必要である。よって、ここでは包括的な意味を採用する。少なくとも 1 つの部品の文が真であれば、命題は真である。

例題 命題

- もし 200000000 が 5 の倍数ならば、400000000 も 5 の倍数である。

が真であるという事実を、定理—証明の方式で表現せよ

解答 必要であるのは、その言葉たちが意味することを書き、そして非常に簡単な代数学をすることである。解答は、以下のようになる。

定理 もし 200000000 が 5 の倍数であるなら、400000000 も 5 の倍数である。

証明 200000000 は 5 の倍数である、を真であると仮定する。これは n という数字を用いて、

$$200,000,000 = 5 \times n$$

ということの意味する。

ここで、 $400,000,000 = 2 \times 200,000,000$ と表せる。すると、

$$400,000,000 = 2 \times 200,000,000 = 2 \times (n \times 5)$$

と書くことができる。これは $(2n) \times 5$ と書きなおせる。自然数 $m(2n = m)$ を用いれば、 $m \times 5 = 400,000,000$ 、つまり 400,000,000 は 5 の倍数である。□

1.4 存在命題

存在命題は、何かの存在について述べている。通常我々は、以下に示すような命題の考えを示すとき、「～がある」、「～が存在する」という言葉を使用する。

- $n^2 = 441$ となるような数値 n は存在する
- $a^2 + b^2 = c^2$ となるような数値 a 、 b 、 c は存在する
- $n^2 = 2m^2$ となるような数値 n と m は存在する
- $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ となるような数値 a 、 b 、 c 、 d は存在する

最初の命題は真である。自然数 21 が $21^2 = 441$ を満たすためである。当然、これは例を見つけることが存在命題の正しさの証明になるということである。例は 1 つを見つけるだけでよい。また、本当に 21 がその場合の唯一の例であるのかに注意する。(おそらく $(-21)^2 = 441$ であることが思い浮かぶであろう。しかし、-21 は自然数ではない。よって該当しない)

例を見つけることは、常に簡単であるとは限らない。例えば $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ となるような数値を見つけることができるなら、きわめて幸運である。本当に、何百年間も、多くの人々が例の存在について疑問を持ってきた。命題が真であるのか、偽であるのか証明できない間、その命題は予想と呼ばれる。先に述べた命題も、予想と呼ばれていた。しかしながら、1988 年に例が発見(問 1.4.5 参照)され、それは定理となった。

1.1 節に戻ってみると、そこでは存在命題についての議論がなされていることに気付くだろう。例えば 15 は 3 の倍数である、と言った場合、それは、 $15 = m \times 3$ となるような自然数 m が存在する、ということの意味する。

1.5 全称命題

しばしば、以下に述べるようにすべての数に関する命題が書かれる。

- $n^2 + n$ は偶数である
- $4n - 1$ は素数である

- もし n が 6 の倍数なら、 n は 3 の倍数である
- もし n が 3 の倍数なら、 n は 6 の倍数である

これらは、全称命題と呼ばれる。厳密に言えば、文の先頭に「すべての自然数 n について」という言葉が付くべきである。この言葉は、全称が現在の目的においては、自然数だけから成ることを断言する。全称命題の真を示したいなら、自然数全てにとってそれらが真であることを示さなくてはならない。

例題 最初の命題が正しいことを、定理と証明の方式で表現せよ

解答 $n^2 + n$ が偶数であることを、1つ1つ個別に調べていくことは可能ではない。その作業は永遠に続くことになるだろう。したがって、別の考え方を採用する。

つまり、もし n が偶数であるなら結果が真であることを調べ、また、 n が奇数である場合も同様にするという方法である。これら 2 つの場合が、 n のとりうる全ての値をカバーするので、結果は成立する。

定理 全ての自然数 n に対して、 $n^2 + n$ は偶数である。

証明 n が与えられたとき、自然数 k を用いて $n^2 + n = 2k$ を示さなければならない。証明は、2 つの場合に分けることができる。

1 : n が偶数の場合。このときは $n = 2r$ と書ける。すると、

$$n^2 + n = 4r^2 + 2r = 2(2r^2 + r)$$

となり、 $k = (2r^2 + r)$ が得られる。

2 : n が奇数の場合。このときは $n = 2s + 1$ と書ける。すると、

$$n^2 + n = (4s^2 + 4s + 1) + (2s + 1) = 2(2s^2 + 3s + 1)$$

となり、 $k = (2s^2 + 3s + 1)$ が得られる。

この 2 つの場合が、すべての可能性をカバーするので、結果は真である。 □

1.6 証明の技術

我々は計算方法を教えられたとき、「掛け算表」のような簡単なルールから始めた。同様に、数学をするために、いくつかの基礎的な証明の技術を理解することが必要となる。すでに 2 つの簡単なものを見てきた。

存在命題が真であることを示す：例を与える

全称命題が偽であることを示す：反例を与える

もちろん、なぜこれらの方法が実行するときに失敗するのかについては、多くの理由がある。例えば、もし存在命題が本当に偽なら、例は存在しない。たとえ例があるとしても、利用できるものとして見つけることは不可能だろう。(問 1.4.5 参照)

論理的推論に基づいた証明を見つけようとするとき、その状況はなかなか難しいだろう。時々、証明を場合分けするような (1.5) 標準的な方法が行われる。しかし、いつでも証明を生み出せるような保証のある黄金の法則は存在しない。

1 つのとても役に立つ方法として背理法が知られている。3 章でその論理的な基礎についてもっと詳しく議論するつもりであるが、おおよそについてその考え方を述べる。

ある命題 a が真であることを示すとき、反対のことを仮定して、そしてその結論が偽を導くことを示す次にその例を示す。

例 29 が素数であることを示せ

解 反対を仮定する：29 は素数ではない。すると $29 = rs$ 、ただし r と s は 1 と 29 以外、である。実際には、これらの数の小さい方を s とすると、 s は 6 よりも小さくなる。なぜなら、もしこれらの数の両方が少なくとも 6 であるとする、 $rs \geq 36$ になってしまうからである。よって、 $s = 2, 3, 4, 5$ である。以上より、29 は 2, 3, 4, 5 の倍数であることが示される。しかし、これは偽である。なぜなら、29 は 2, 3, 4, 5 の倍数の標準的なリストの中の数ではないからである。(times-tables) よって、仮定は偽であり、ゆえにもとの命題は真である。

定理が述べられるとき、背理法で証明がなされるのは、とても古くて有名な手法である。もっと詳細な数学的概論は後ほど議論するが、すでにその方法についての十分な記述は知られただろう。

定理 素数の最大値は存在しない

証明 素数の最大値は存在する、と仮定する。この数を X とする。すると、 $2, 3, 5, \dots, X$ と増加する素数の完全なリストを作ることができる。次のような数について考えてみる。

$$Y = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times X) + 1$$

Y は X よりも大きいので素数ではない。そのため、 Y は素数の要素を持っていないなければならない。しかし、1 を除く素数のリストのうちの 1 つの数で Y を割ろうとすると、 Y はこれらの素数の倍数ではない。ゆえに、これらは X よりも大きい素数となる。

これは、最初の仮定を否定する。すなわち、仮定は偽であり、よって、もとの命題は真である。

1.7 Miscellaneous Exercises

省略。

2 集合の記法

2.1 オブジェクトと数の集合

集合の例を述べる。

$$X = \{a, b, c\}, \quad Y = \{n | n \text{ は } 11 \text{ の倍数}\}$$

最初の例は、集合 X が a, b, c を含んでいることを言っている。2 つ目の例は、集合 Y が 11 の倍数となるような数 n で成り立っていることを言っている。(おそらく、どんな種類の数 n が許されているのか疑問に思うだろう。この点について、手短かに明らかにしたい) これらの 2 つの例は、リストを作って集合を定義する方法と、集合のある特性を具体的に記述する 2 つの方法について説明している。

オブジェクト x と集合 S が与えられたとき、もしも S の定義するリストに x が入っている、または S の定義する特性を x が満たすならば、 x は S の要素であるという。 x を S の元とも言う。または、単に x は S に含まれる、と言う。これを、 $x \in S$ と書く。

上記のように X と Y を定義したとき、 $b \in X$ 、 $33 \in Y$ である。また $5 \notin Y$ とも書ける。これは 5 が Y の要素ではないことを示す。

なぜなら、自然数の集合

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

はとても重要であるので、特別な書体 $\mathbf{N}$ を使って書く。(テクにはないが、この書体はブラックボードボードと呼ばれる) よって、どのような集合の指示にも記号 $\mathbf{N}$ を使うことができる。ただし、 $\mathbf{N}$ は自然数にしか使えない。そこで、他の数の集合についての特別な記号を導入したい。

$\mathbf{Z}$ —整数の集合

$\mathbf{Q}$ —有理数の集合

$\mathbf{R}$ —実数の集合

現在の段階で関係する数は自然数である。時折、例で整数について (特に 0) 言及するかもしれないが、当分の間は「全称」を包括する。よく、

$$Y = \{n \in \mathbf{N} | n \text{ は } 11 \text{ の倍数}\}$$

のような表記が役立つ。これは、

$$Y \text{ は } 11 \text{ の倍数となるような全ての自然数 } n \text{ の集合である}$$

というように読む。はっきり言うと、この表記は他の数について考える必要がある時にそれに合わせて変えることができる。

2.2 部分集合

もし A の全ての要素が B の要素でもあるとき、 A は B の部分集合といい、 $A \subseteq B$ と書く。

例えば、

$$\{14, 49, 77\} \subseteq \{n \in \mathbf{N} | n \text{ は } 7 \text{ の倍数}\}$$

C と D は「等しい」というような、多くの数学的な定理は 2 つの与えられた集合の命題の形で表現できる。このような命題を証明するために、 C と D が同じ要素を持つことを証明する。つまり、 C の全ての要素が D の要素であり、 D の全ての要素が C の要素であるということである。このように、 $C = D$ という命題は $C \subseteq D$ かつ $D \subseteq C$ と同値である。

例 $C = D$ を示せ。ただし、

$$\begin{aligned} C &= \{n \in \mathbf{N} | n \text{ は } 6 \text{ の倍数}\} \\ D &= \{n \in \mathbf{N} | n \text{ は } 2 \text{ の倍数かつ } 3 \text{ の倍数}\} \end{aligned}$$

である。

解 最も重要な点は、 $C \subseteq D$ かつ $D \subseteq C$ という 2 つのことを思い出すことである。

$C \subseteq D$ $c \in C$ が与えられると、ある数 m に対して $c = 6m$ を持つ。これは、 $c = 2 \times (3m)$ として書きかえることができ、 c が 2 の倍数であることを証明する。また、 $c = 3 \times (2m)$ とも書きかえられるので、 c が 3 の倍数であることを証明する。したがって、 $c \in D$ であるので、 $C \subseteq D$ である。

$D \subseteq C$ $d \in D$ が与えられると、ある数 r と s を用いて $d = 2r$ と $d = 3s$ を持つ。このように、 $3s$ は偶数 $2r$ に等しい。しかし、もし s が奇数なら、 $3s$ は奇数であるので、 s は偶数でなければならない。 $s = 2t$ とすると、 $d = 3s = 6t$ となり、これは d が 6 の倍数であることを証明する。したがって、 $d \in C$ であり、 $D \subseteq C$ である。

要素を持たない集合を空集合と呼び、記号 $\emptyset$ で定義する。これは驚くほど役に立つ集合である。なぜならそれは、全ての集合の部分集合であるからである。

全ての集合はそれ自身の部分集合であることに注意せよ。 X の部分集合で X と等しくないものは、真部分集合として知られている。

2.3 和集合と積集合

集合 A と B が与えられるとき、 $A \cap B$ を積集合として

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

例えば、もし

$$A = \{n \in \mathbf{N} | n \text{ は素数}\}, B = \{n \in \mathbf{N} | 10 \leq n \leq 30\}$$

ならば、 $A \cap B = \{11, 13, 17, 19, 23\}$ である。もし C と D が $C \cap D = \emptyset$ である集合なら、 $C = D$ は互いに共通元を持たないという。

A と B の和集合を $A \cup B$ と書き、

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

と定義する。結合は、 A と B の両方またはどちらか一方のオブジェクトを含むことに注意せよ。つまり、1.4 節で言ったように、「含む」は、またはを意味すると想定する。

いくつかの役立つ $\cap$ と $\cup$ の演算子の特性は、定義を直接述べる。例えば、もし $A \subseteq B$ なら、 $A \cap B = A$ であることは明確である。また、

$$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

である。図 2.1 の $A \cup (B \cap C)$ の図のように、図によって集合の結合や共通元を説明することが時々役に立つ。これはベン図と呼ばれる。

ベン図はとても役に立つが、ただの道しるべでしかない。ベン図は、数学的な証明の形式としては使えない。

例 次に述べられている命題の反例を見つけよ。

- どのような集合 A, B, C においても、 $A \cup (B \cap C) = C \cup (B \cap A)$ である

解 おそらく、図 2.1 のような図を書くことから始めるだろう。そして $C \cup (B \cap A)$ の集合を塗りつぶしてみる。これは $A \cup (B \cap C)$ と同じではない。しかし、この考えを反例に変えるために、図で描いた集合 A, B, C が何を意味するかを厳密に説明しなくてはならない。そしてこれは、いくつかの慎重な考え方を必要とする。実際、小さいいくつかの集合を書いて、ほぼ無作為に反例を構成する方が簡単である。最初の試みは、3 つの互いに共通元を持たない集合を作ることだろう。例えば、 a, b, c のように、それぞれ全く違う 1 つの要素をもつものを考える。これは、

$$A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$$

である。これらの集合について、

$$A \cup (B \cap C) = \{a\} \cup \emptyset = \{a\}$$

$$C \cup (B \cap A) = \{c\} \cup \emptyset = \{c\}$$

を得るので、答えが違っていることがわかる。よってこれは反例である。

3 論理的な構造

3.1 基礎的な演算子:and,or,not

この章では、数学で使われている論理的な用語の正確な意味について学ぶ。すでに基本用語 or のように、その意味についての議論は観測してきた。

1 章では、命題は「真」か「偽」かどちらかになるということで、数学的な程度をとった。これからずっと、この言葉を真理値として表す。当分の間、その重要性を強調して、それを大文字の頭文字で True、False と書く。

数学の目標は、どのような命題の意味にも、真理値のうちひとつを割り当てることである。 p をそのような命題と考える。とても一般的な言葉によるある方法では、 p はより簡単な、真の値がすでに知られているような命題に分解される。そして p が真であることを決定する論理的な手順を使う。もっとも簡単な複合命題の例は、「not- p 」であり、これは p の否定と呼ぶ。例えば、これらは命題とその否定である。

- 20 は 3 の倍数である
- 20 は 3 の倍数でない

形式的に、 p の否定は $\neg p$ と書く。 $\neg p$ の真理値の割り当てのルールはとても明らかなもので、 $\neg p$ は p が偽のとき真である。そして p が真のとき偽である。この記述方法について、True と False の代わりに記号 T と F を使うと、表記の際に便利である。

p	$\neg p$
T	F
F	T

これは真理値表として知られる簡単な例である。1 章では、複合命題を議論するために and や or をどう使うかについて説明した。これらの言葉の表記を持つことは、慣例的ではあるが、便利であり、数学よりも形式的な論理で主に使われる。2 つの命題 p, q が与えられるとき、表記

$$p \vee q, p \wedge q$$

はそれぞれ、 p または q 、 p かつ q に相当する。今までの明確でないあいまいさを避けるため、すべての命題の真理値を真理値表によって与える。

p	q	$p \vee q$	p	q	$p \wedge q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F

これらの表の最初の 2 列は、 p と q の真理値の 4 つの可能な割り当て方に相当し、3 つ目の列は複合命題の結果の真理値を与える。特に、 $p \vee q$ を言っている 1 つ目の表は、もし p か q の 1 つか両方が真なら結果も真であると言っている。言い換えれば、記号 $\vee$ は or という言葉の使い方を含めて定義する。

3.2 論理的同値

次のような命題、

- 27 は 4 または 5 の倍数でない
- 27 は 4 の倍数でなく、かつ 27 は 5 の倍数でない

を考える。少し考えたあと、おそらくこの 2 つの命題は「同じである」と結論付けられるだろう。もう少し考えると、その結論は特定の命題の特性としよりはむしろ、論理における事実であることが見れる。これはどのような意味であるのかについて説明したい。

複合命題は両方とも、2 つの単純な命題で構成されている。

- 27 は 4 の倍数である
- 27 は 5 の倍数である

これらの命題を p, q とするなら、最初の命題は $\neg(p \vee q)$ によってもっと短縮できる。そして、2 つ目は $(\neg p) \wedge (\neg q)$ である。

今、2 つの命題は任意の命題であると考え、 $\neg(p \vee q)$ と $(\neg p) \wedge (\neg q)$ に対する真理値表を、次に述べるように作ることができる。

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F	T	T	T

p と q に割りふられた真理値の結論によると、命題 $\neg(p \vee q)$ と $(\neg p) \wedge (\neg q)$ は、常に同じ真理値を持つ。2 つの複合命題がこのような特徴を持つとき、これは論理的に同値であるという。よって、命題 $\neg(p \vee q)$ と $(\neg p) \wedge (\neg q)$ は同値である、を示せた。

3.3 if-then

演算子 $\neg, \vee, \wedge$ は複合命題をより簡単なものにすることを確立する。しかし、構成の仕方が明らかに違うものがある。例えば、1 章で if-then(もし～ならば) という言葉を使って複合命題の連結について議論した。類似した論理の構造が、 $p \Rightarrow q$ で定義される。これは「もし p ならば q である」と読むことができる。(もしくは、「 p は q を示す」)

$p \Rightarrow q$ の真理値表を以下に述べることで、 $\Rightarrow$ の構造を形式的に定義する。

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

学生たちはよく、最後の 2 列について議論する。なぜ命題 $p \Rightarrow q$ は、 p が偽のとき真となるのだろうか？ しながら、我々の定義に合うような実際の問題はない。しかし、通常は「暗に示す」という言葉がその説明方法となる。実際、表の最後の 2 列はきちんと筋が通っている。

例えば、1.4 節では、なぜ命題

- もし 200000000 が 375 の倍数なら、400000000 は 375 の倍数である

が真であるのかについて説明した。命題「200000000 は 375 の倍数である」が真か偽かどうかという疑問は関係なく、もしそれが真であれば、それならば 2 つ目の命題も真であると主張する。

3.4 逆命題

$p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ が同じでないことは、よく知られた経験の問題である。例えば、命題

- もし a と b が偶数なら、 $a + b$ は偶数である

- もし $a + b$ が偶数なら、 a と b は偶数である

は明らかに違っている。確かに、最初のほうは真で、2 つ目は偽である。(問 3.4.1)

一般に、命題 $q \Rightarrow p$ は $p \Rightarrow q$ の逆として知られている。それは以下のような繰り返しに値する。
 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ の真理値の間には、何の関係もない。

例 次の命題の逆を書け。

- もし n が 12 の倍数なら、 n は 4 の倍数である

この命題は真か偽か、また、逆命題は真、偽どちらか。証明するか、反例を与えることによってその答えを証明せよ。

解 逆は、

- もし n が 4 の倍数なら、 n は 12 の倍数である

である。元の命題は真である。なぜなら、もし $n = 12m$ なら、 $n = 4 \times (3m)$ であるからである。逆命題は偽であり、8 が反例である。

もちろん、命題とその逆が両方真ということも起こる。例えば、命題

- もし a と b のどちらか 1 つが偶数なら、 $a + b$ は奇数である
- もし $a + b$ が奇数なら、 a か b のどちらか 1 つは偶数である

は両方とも真である。

上記の命題が両方真であることを、次の命題で言うように表現すると便利である。

- $a + b$ が奇数である必要十分条件は、 a か b のどちらか一方が偶数であることである

必要十分条件という言葉は、記号 $\Leftrightarrow$ で定義される、新しい論理的な演算子に相当する。真理値表によって定義する。

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p \Leftrightarrow q$ が $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ と論理的に等価であることをチェックするのは簡単である。(問 3.4.4) 実際には、これは $p \Leftrightarrow q$ 形式の定理を証明するために、定理 $p \Rightarrow q$ とその逆 $q \Rightarrow p$ を説明することを意味する。次に、その例を述べる。

例 自然数が 12 の倍数であるための必要十分条件は、それが 3 の倍数かつ 4 の倍数であることを証明せよ。

解 証明は 2 つのパーツに分かれる。

($\Rightarrow$) もし n が 12 の倍数なら、 $n = 12m$ とする。すると、 $n = 3 \times (4m)$ であり、 $n = 4 \times (3m)$ である。よって、 n は 3 と 4 両方の倍数である。

($\Leftarrow$) 逆はもう少し考えることを必要とする。 $n = 3r$ と $n = 4s$ を考える。なぜこれらの等式が、ある t について、 $n = 12t$ であることを示すのだろうか？ 答えは、 $4s$ が 3 の倍数であることを意味する。 $3r = 4s$ に気づいていることによる。しかし 4 は 3 の倍数ではないので、 s は 3 の倍数でなくてはならない。 $s = 3t$ と言う。今、 $n = 4s = 4(3t) = 12t$ であることが必要とされた。 $\square$

3.5 対偶命題

命題 $\neg p \Rightarrow \neg q$ は命題 $p \Rightarrow q$ の対偶と呼ばれる。その真の値は、真理値表の意味するものによって決定する。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

$\neg p \Rightarrow \neg q$ の真理値が $p \Rightarrow q$ のものと同じであることがわかるだろう。言い換えれば、2 つの命題は論理的同値である。したがって、結論は、

命題 $p \Rightarrow q$ はその対偶 $\neg p \Rightarrow \neg q$ と論理的同値である。

対偶はよく、証明の構成をより簡単にする。

例 数 3 は素数である。そして、 $3 + 1 = 4$ は完全平方である。 $n + 1$ が完全平方になるような数 n は他に存在しないことを示せ。

解 この例では「全称」は、全ての自然数 $n \geq 4$ で成り立つ。命題

- n は素数 $\Rightarrow n + 1$ は完全平方ではない

を証明することを聞いているが、これを証明するためには、この対偶を証明すれば十分である。対偶は、

- $n + 1$ は完全平方 $\Rightarrow n$ は素数ではない。

である。これはいくぶんわかりやすい。もし $n + 1 = m^2$ なら、

$$n = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1)$$

n は $m + 1$ と $m - 1$ の積で表されるので、小さい方の数 $m - 1$ が 1 でない限り素数ではない。 $m = 2$ と $n = 3$ の場合のみ成立するので、 $n = 3$ は唯一可能である。

この証明方法は、1.6 節で議論した否定の証明に密接に関係している。その方法は、3 つのステージがある。

(1) 命題 s を与え、それが真であることを証明したいと思う

(2) 逆 $\neg s$ を仮定する

(3) 偽であると知られている命題 r を推論する

(3) のステージでは、命題 r はよく $q \wedge (\neg q)$ の形になる。これは明白な「矛盾」である。

3.6 全称と存在の限定記号

この節では、全称と存在命題についての論理的表記について説明する。黒丸は、独立した命題として使ってきたが、それは便利なラベルに過ぎず、数学的な表記ではない。

記号 $\forall$ は全てに対して、の省略である。命題

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad n^2 \text{は奇数}$$

は「全ての自然数 n に対して n^2 は奇数である」を示す。(この命題は明らかに偽である)

記号 $\exists$ は存在する、の省略である。例えば、

$$\exists n \in \mathbf{N} \quad n^2 \text{が奇数であるような}$$

は「 n^2 が奇数であるような自然数 n が存在する」を示す。これが真であることを示すためには、1つの例を与えることだけを必要とする。($n = 1$ がそうである)

記号 $\exists$ と $\forall$ は限定記号として知られている。もちろん、それは集合 $\mathbf{N}$ における、他の事象にも応用できる。したがって、もし $P(x)$ が集合 X の要素 x についての命題なら、次のような全称命題を持つ。

$$\forall x \in X \quad P(x)$$

もし全ての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真なら、この命題は真である。そして、もし少なくとも1つ $P(x)$ が偽であるような $x \in X$ が存在すれば、それは偽である。いつもの専門用語では、すでに1章で導入したが、 $P(x)$ が偽である x は反例という。

例 $X = \{n \in \mathbf{N} | 1 \leq n \leq 100\}$ とする。命題

$$\forall x \in X \quad x^2 + x + 41 \text{ は素数である}$$

が偽であることを示せ。

解 反例が必要である。おそらく、 $x = 1$ から試すだろう。しかし、

$$1^2 + 1 + 41 = 43$$

は素数である。よって1は反例ではない。同様に、

$$2^2 + 2 + 41 = 47$$

であるので、2も反例ではない。この線をもう少し試みるのは、絶望的である。(もしよければ $x = 10$ か $x = 20$ を試してみて欲しい)

したがって、違うアプローチに挑戦してみる。 $x^2 + x + 41$ が素数でないと確信するために、 x の値を x^2 と x と41の共通項の積として指定する。これは簡単である。 $x = 41$ をとる。すると、

$$41^2 + 41 + 41 = 41 \times (41 + 1 + 1) = 41 \times 43$$

であり、 $x = 41$ は反例である。 $\square$

限定記号 $\exists$ と $\forall$ の間には、論理的な関係がある。定義から直接述べるような $\forall x P(x)$ は $P(x)$ が偽となるような x が少なくとも1つあれば偽である。言い換えれば、もし $\exists x \neg P(x)$ なら真である。したがって、記号的な形でこの関係を表現できる。

$$\neg(\forall x P(x)) \text{ は } \exists x \neg P(x) \text{ と同値である。}$$

4 自然数

4.1 代数の法則

数学では、真の値がすでに知られているような、より簡単な命題に命題を作りかえることで、命題が真か偽かを決定する。明らかに、このプロセスはしっかりとした基礎を持っていないといけない。いくつかの命題は、一般的に真であると決められてなければならない。命題に真理値を与え、もっと複雑な他のものについて推論し、その命題も真となる。

命題は、公理として真であることが知られていると公言されている。この章では、自然数の集合 $\mathbb{N}$ で定義された公理のシステムを発展したい。自然数が何であるかということを議論するような哲学的な質問よりも、それがどう振る舞うかについて説明したい。

最初の 2 つの $\mathbb{N}$ に対する公理は、加法と乗法の演算子が閉じていることを確実にする。つまり、ある自然数ある自然数 a, b が与えられたとすると、次に述べる命題の真理値を仮定する。

1. $a + b \in \mathbb{N}$

2. $a \times b \in \mathbb{N}$

次の 7 つの公理は、加法と乗法の基礎的な特性を与える。これらの公理を覚える必要はない。なせなら、長年の間、これらのことを自明のこととしてみなしてきたからである。これらは、代数学の法則と呼ばれる。

3. $a + b = b + a$

4. $(a + b) + c = a + (b + c)$

5. $a \times b = b \times a$

6. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

7. 全ての n に対して、 $n \times 1 = n$ となる元 $1 \in \mathbb{N}$ が存在する

8. ある $z \in \mathbb{N}$ に対して、もし $m \times z = n \times z$ なら $m = n$ である

9. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

よく、 $a \times b$ の代わりに ab と書く。初歩の代数学の慣習を述べる。例えば、公理 9 は $a(b + c) = ab + ac$ と書き、「分配法則」として知られている。

適当な「定義」を縁取ることによって、これらの公理に基づく新しい概念を確立することができる。そして、(希望的に) それらについての定理を証明する。

例 「 m が n の倍数である」という言葉を定義する。もし a と b が n の倍数なら、 n はすべての $x, y \in \mathbb{N}$ に対して $xa + yb$ であることを証明せよ。

解 意味は明確だが、時間は定義を真に含む構成である。

定義 もし $m = rn$ となるような自然数 r が存在するなら、 m は n の倍数である。

今、必要とされる定理を述べ、証明する。

定理 4.1 もし a と b が n の倍数なら、全ての $x, y \in \mathbb{N}$ に対して、 $xa + yb$ は n の倍数である

証明 定義より、ある数 r と s に対して、 $a = rn$ 、 $b = sn$ と書ける。「代数の法則」(公理 1-9) を使うと、それは、

$$xa + yb = x(rn) + y(sn) = (xr + ys)n$$

と書ける。 $xr + ys \in \mathbb{N}$ なので、定義 $xa + yb$ は n の倍数であると書ける。

4.2 順序付きで自然数を表現する

早い時代から、 $1, 2, 3, 4, \dots$ のように数を特定の順序で列挙するように教えた。このリストで、数 m が数 n の前に来た場合、 m は「 n より小さい」という形式的な定義を述べる。

定義 ある自然数 m と n に対して、命題 $m < n$ は、 $m + x = n$ となるような $x \in \mathbb{N}$ が存在することを意味する。

この定義の簡単な帰結は、すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して $m < m + 1$ である。他の帰結には、役に立つ事実が述べられている。

定理 4.2 もし $a < b$ かつ $b < c$ なら、 $a < c$ である

証明 もし $a < b$ かつ $b < c$ なら、定義にしたがって、 $a + x = b$ かつ $b + y = c$ となる x と y が存在する。それは、

$$a + (x + y) = (a + x) + y = b + y = c$$

と述べられる。そしてこれは、 $a < c$ を意味する。□

$<$ についてのいくつかの基礎的な特性は、公理 1-9 と定義で述べられているが、そこから推論できない重要な特性がある。よって、新しい公理を導入する。

10. 任意の自然数 m, n について、以下の 3 つの命題のうち、ちょうど 1 つだけが真である

$$m < n, \quad m = n, \quad n < m$$

なぜこの公理が必要かという 1 つの理由は、追加された「消去法」(4.23) は、それなしでは推論できないからである。数の比較には、他に 3 つの記号を用いる。 $>, \leq, \geq$ である。3 つは全て、 $<$ の用語を用いれば定義できる。

$a > b$ は $b < a$ を意味する。

$a \leq b$ は $a < b$ または $a = b$ を意味する。

$a \geq b$ は $b < a$ または $a = b$ を意味する。

4.3 帰納法の原理

$\mathbb{N}$ についての公理のリストはまだ完全ではない。この理由は、1 から始まって繰り返し、 k に続く数が $k+1$ である規則を使用することによって、すべての自然数が得られることを保証することが必要であるということである。言い換えれば、明確に k と $k+1$ の間に自然数がある可能性を排除しなければならない。

必要とする公理は「数学的帰納法」またはただの「帰納法」と呼ばれる。それは普通、 n を自然数として $P(n)$ の形で定式化される。

11. $P(n)$ は以下に述べる特性をもつ命題と考える

(1) $P(1)$ は真

(2) 全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して、もし $P(k)$ が真なら、 $P(k+1)$ は真

このとき、 $P(n)$ は全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して真

公理はこの方法で定式化される。なぜなら、「帰納法による証明」の結論付けの方法は、数学で最も役に立つものの 1 つであるからである。それは通常、以下に述べる例のように表現される。

例 全ての $n \in \mathbb{N}$ において、 $n^3 + 5n$ が 6 の倍数であることを証明せよ。

解 これは $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ の形の命題である。 $P(n)$ が公理 11 で与えられた特性を満たすことを調べなければならない。

(1) $P(1)$ は真である。 $1^3 + 5 \times 1 = 6$ であるので、これは 6 の倍数である。

(2) $P(k)$ が真であると仮定する。よって、 $k^3 + 5k = 6m$ と書ける (m は自然数)。 $P(k+1)$ が真であることを推論しなくてはならない。 $n^3 + 5n$ に、 $n = k+1$ を代入すれば、

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (5k + 5)$$

を得る。 $k^3 + 5k + 6m$ の仮定を使うために、これを次のように書き直す。

$$(k^3 + 5k) + 3(k^2 + k + 2) = 6m + 3(k(k+1) + 2)$$

これは、相変わらずこれが 6 の倍数であることを示す。今、 $k(k+1)$ は偶数である。これを $2r$ とする。 $k, k+1$ のうち 1 つは必ず偶数であるからである。したがって。最後に表したものは、 $6m + 3 \times 2r = 6(m+r)$ と等しい。

$P(1)$ が真であることを示し、 $P(k)$ が真ならば $P(k+1)$ も真であることを示せた。帰納法の原理 (公理 11) を応用すると、 $P(n)$ は全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して真である。

専門用語を述べることを使うと便利である。命題 $P(1)$ は帰納法の基底と呼ばれる。 $P(k)$ が真である仮定は、帰納法の仮定と呼ばれ、 $P(k)$ ならば $P(k+1)$ の証明は帰納法のステップと呼ばれる。

4.4 和の公式

和に対するシグマ記号は、数学でとても役に立つ。例えば、 $r = 1, 2, 3, 4, 5$ のときの、 $4r+3$ という形の数の和は、

$$\sum_{r=1}^5 (4r+3)$$

と書ける。この場合、きちんと和の計算をすると

$$\sum_{r=1}^5 (4r+3) = 7 + 11 + 15 + 19 + 23 = 75$$

となる。次のステップは n という言葉の和を考えることである。ここで、 n は任意の数である。これを、以下のように書く。

$$\sum_{r=1}^n (4r+3) = 7 + 11 + \cdots + (4n+3)$$

ミステリアスな 3 つのドット ($\cdots$) について、次の節でもう少し詳しく書く。しかし、しばらくの間は「答え」に集中する。もし、算術の展開についていくつかのことを覚えているならば、この和は $2n+5n$ に等しいことを示せるだろう。

我々の観点から、重要な点は、結果が帰納法の証明に対して正しい $\forall n \in P(n)$ の形である命題であるということである。

例 全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して、

$$\sum_{r=1}^n (4r+3) = 2n^2 + 5n$$

であることを証明せよ。

解 $n=1$ のとき、

$$\sum_{r=1}^1 (4r+3) = 7, \quad 2 \times 1^2 + 5 \times 1 = 7$$

なので真である。 k のとき真であると仮定すると、

$$\sum_{r=1}^k (4r+3) = 2k^2 + 5k$$

である。 $k+1$ について真であるか推論しなくてはならない。今、

$$\sum_{r=1}^{k+1} (4r+3) = \sum_{r=1}^k (4r+3) + (4(k+1)+3)$$

値が k のときの和についての仮定を使うと、

$$\begin{aligned} (2k^2 + 5k) + 4(k+1) + 3 &= 2k^2 + 9k + 7 \\ &= (2k^2 + 4k + 2) + (5k + 5) \\ &= 2(k+1)^2 + 5(k+1) \end{aligned}$$

最後の行は $k+1$ の形を必要とする。従って、公理 11 の 2 つの仮定が満たされており、公式が全ての n について真であることが推論された。

あらかじめ知っている公式から考えることを提供する「帰納法による証明」がこの状況で働くことが見れるだろう。言い換えれば、それは予想命題を作るための問題への1つのアプローチについて述べている。この問題には節4.8で戻ってくる。

例 次に述べる和

$$\sum_{r=1}^n r^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

の公式を探せ。

解 便宜上、和を S_n と定義する。 S_n の値について、いくつかの表を作ることが、最初の1番いい方法である。

n :	1	2	3	4	5	6
S_n	1	9	36	100	225	441

このように、値は完全平方である。実際、それらは1,3,6,10,15,21の2乗である。数値は、 $n = 1, 2, \dots, 6$ に対して、 $n(n+1)/2$ の形の数である。このような数の根拠は、 $S_n = (n(n+1)/2)^2$ という予想命題を導く。

今、公式な定理—証明の形でこれが事実であることを証明する。

定理4.4 全ての自然数 n に対して、

$$\sum_{r=1}^n r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

が成り立つ。

証明

帰納法の基底 $S_1 = 1$ かつ、 $((1 \times 2)/2)^2 = 1$ であるので、公式は S_1 を含む。

帰納法の仮定 $S_k = (k(k+1)/2)^2$ が成り立つと仮定する。

帰納法のステップ 次の式を得る。

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^3 = (k(k+1)/2)^2 \\ &= (k+1)^2((k^2/4) + (k+1)) = (k+1)^2(k^2 + 4k + 4)/4 \\ &= ((k+1)(k+2)/2)^2 \end{aligned}$$

このように、 S_{k+1} についての公式を推論できた。これは完全な帰納法のステップであり、帰納法の基底についてもチェックした。帰納法の原理によれば、この公式は全ての $n \in \mathbb{N}$ について真である。 $\square$

4.5 帰納的定義

最初の年に、国営宝くじのギャンブルで2ポンド損失し、そしてそれから先は毎年2倍ずつ損失すると仮定する。すると、最初の数年の損失は、次に述べるように計算される。

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 2 \times s_1 = 4, \quad s_3 = 2 \times s_2 = 8, \quad s_4 = 2 \times s_3 = 16, \\ s_5 = 2 \times s_4 = 32, \quad s_6 = 2 \times s_5 = 64, \quad s_7 = 2 \times s_6 = 128$$

連続する数は、 $s_{n+1} = 2s_n$ のルールで与えられる。この種類の定義は、帰納的定義として知られている。

宝くじの損失は、 $s_n = 2^n$ の公式で与えられることもできる。通常、 2^n は「 n 個の 2 の積」という意味として考えるが、これは実際は正確な定義に対してはいくぶんずさんな解釈である。帰納的に書くと、

$$2^1 = 2, \quad 2^{n+1} = 2 \times 2^n \quad (n \geq 1)$$

次に述べる例は、この定義の方法がとてもよく知られていることを示す。

例 1 n の階乗は、 $n!$ と書かれ、1 から n までの全ての自然数をかけあわせることで得られる。それは、 n が $n = 6$ のように特定の値である時に、これが意味することがわかるのは簡単である。

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

一般的な n の値に対して、それが何を意味するのかについて明確にしようとするときは、 $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ のように書くことで終わらせる。 $\dots$ の表記はとても役に立ち、ひんぱんにそれを使うだろう。しかしその意味は自明ではないことを、よくわかっておくことが重要である。実際には「3 つのドット」は帰納的定義の簡潔な言い方である。 $n!$ を定義する正しい方法は、

$$1! = 1, \quad (n+1)! = (n+1) \times n! \quad (n \geq 1) \quad \square$$

例 2 帰納的定義の別の例は、前の節で導入したシグマ記号である。数の和、

$$\sum_{r=1}^n a_r \quad \text{または、同値的に} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

を、次のように定義した。

$$\sum_{r=1}^1 a_r = a_1, \quad \sum_{r=1}^{n+1} a_r = a_{n+1} + \sum_{r=1}^n a_r \quad (n \geq 1) \quad \square$$

例 3 $f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 2)$

と定義したと仮定する。 f_n の最初のいくつかの計算結果は、以下のようなプロセスで得られる。

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$$

以下同様に続く。これらの数はとても有名である。これらは、フィボナッチ数と呼ばれ、とても興味深い特性を持つ。(問 4.6.4) 最初の 15 個のフィボナッチ数は、

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad 89 \quad 144 \quad 233 \quad 377 \quad 610 \quad \square$$

4.6 帰納法の原理の別の形

命題 $n^2 > 7n + 1$ について考える。明確に、それは $n = 1$ のとき偽である。しかし、 $n = 10$ のような値のときは真である。整然と計算してみると、

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$7n + 1$	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71

計算結果は、全ての $n \geq 8$ に対して $n^2 > 7n + 1$ という予想命題を導く。「帰納法」でこれを証明しようとするために、1 ではない帰納法の基底を必要とする。1 では偽になるが、8 は真となる最初の数である。証明は以下に述べるものである。

例 全ての $n \geq 8$ に対して $n^2 > 7n + 1$ を証明せよ。

解 $n = 8$ のとき、 $8^2 = 64$ であり、 $7 \times 8 + 1 = 57$ となるので、結果は真である。 n が任意の数 $k \geq 8$ のとき $k^2 > 7k + 1$ が真であると仮定する。すると、

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > (7k+1) + 2k + 1 = 7(k+1) + 1 + (2k-6)$$

$k \geq 8$ であるので、 $2k-6$ は自然数であり、上記の最後の表記は $7(k+1) + 1$ より大きい。帰納法のステップが正しいことが証明され、よってすべての $n \geq 8$ に対して、結果は真である。□

上記の帰納法の原理を使った解釈は、それほど新しいものではない。それは、次に述べるトリックによって、公理 11 で与えられた形から変形できる。 $P(n)$ は $n^2 > 7n + 1$ であるとする。そして、 $P(n+7)$ を $Q(n)$ と定義する。そうすると、上で与えられた証明は、 $P(n)$ よりむしろ $Q(n)$ への公理 11 の応用によって得られる。

役に立つ別の公理 11 と同値な変形がある。これは、 $P(k+1)$ が真であることを推論するために、 $P(k)$ が真であることを仮定した場合、帰納法のステップで新しい特性が現れる。実際、ちょうど $P(k)$ である代わりに、 $1 \leq i \leq k$ のすべての命題 $P(i)$ の真理値を仮定することが許される。これは、強帰納法の原理として知られている。しかしながら、この名前は誤解を招きやすい。なぜなら、変形の前と同様に、簡単なトリックが、「強」帰納法の定理は実際には、公理 11 の結果であるということを示しているからである。(Ex. 4.6.5)

実際には、強帰納法の定理はよく帰納的定義についての質問で必要とされる。

例 もしも、 u_n が全ての $n \geq 2$ に対して、 $u_1 = 1, u_2 = 5, u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$ と定義されているならば、 u_n は全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $u_n = 3^n - 2^n$ であることを示せ。

解 帰納法の基底は、 $n = 1$ と $n = 2$ のとき、主張が真であるという事実である。

$$3^1 - 2^1 = 1 = u_1, \quad 3^2 - 2^2 = 5 = u_2$$

帰納法のステップは、 u_k と u_{k-1} 両方に対して式が成り立つことを仮定し、 u_{k+1} に対しても成り立つことを議論することである。

$$\begin{aligned} u_{k+1} = 5u_k - 6u_{k-1} &= 5(3^k - 2^k) - 6(3^{k-1} - 2^{k-1}) \\ &= (5 \times 3 - 6)3^{k-1} - (5 \times 2 - 6)2^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 9 \times 3^{k-1} - 4 \times 2^{k-1} \\
&= 3^{k+1} - 2^{k+1}
\end{aligned}$$

これは、 u_{k+1} に対して必要とされた式であり、したがって、強帰納法の定理より、結果は全ての $n \geq 1$ に対して真である。□

4.7 最大元、最小元

子どもたちは、よくこう尋ねる。「一番大きな数は何？100万？10億？1兆？」彼らはめったに正しい答えを得られない。「ないよ！」と。この事実の証明はとても簡単であるのにもかかわらず、もしあなたがそれについて明確でないなら、問 4.7.1 を見てほしい。人気のある難題であるのにもかかわらず、 $\mathbf{N}$ には最大数がないという命題についての神秘はない。

一方、多くの人々が、 $\mathbf{N}$ は最小元を持ち、そしてその数は 1 であることは「自明だ」と考える。言い換えれば、全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して、 $n \geq 1$ である。これは $\forall n \in \mathbf{N} P(n)$ の形の命題であり、したがって帰納法による照明を試みることができる。幸運なことに、これはとても簡単である。(Ex.4.7.4)

$\mathbf{N}$ の部分集合 X に対しての状況を議論するために、正式な定義を書き表す。

定義 X は $\mathbf{N}$ の部分集合とする。もし全ての $x \in X$ に対して、 $l \leq x$ なら、要素 $l \in X$ は、 X の最小元である。もし全ての $x \in X$ に対して、 $g \geq x$ なら、要素 $g \in X$ は、 X の最大元である。よく、 l と g は X の最大値、最小値として表される。

例 もしあるのならば、次に述べる集合 X の最小元と最大元を見つけよ。

$$X = \{n \in \mathbf{N} \mid n^2 + 2n \leq 60\}$$

解 X の値のリストを作る。明確に、値 1,2,3,4,5,6 は条件を満たし、そしてそれらは X に属する。しかしながら、 $7^2 + 2 \times 7 = 63$ であり、これは 60 よりも大きい。よって、7 は X に含まれない。

さらに、もし $n > 7$ ならば、ある $r \in \mathbf{N}$ に対して $n = 7 + r$ であり、

$$\begin{aligned}
n^2 + 2n &= (7 + r)^2 + 2(7 + r) = (49 + 14r + r^2) + 14 + 2r \\
&= 60 + (3 + 16r + r^2)
\end{aligned}$$

を得る。 $3 + 16r + r^2$ は自然数なので、最後の表現は 60 よりも大きい。したがって、 $n > 7$ のどんな自然数も X に含まれない。 X の最小値が 1 で、最大値が 6 という結果になる。□

上記のような議論では、6 と $6 + 1 = 7$ の間には自然数が存在しないという「明らかな事実」を仮定した。節 4.3 で注意したように、これは実際に自然数の最も重要な特性である。なぜなら、それは分数のような数値の他のシステムからそれらを区別するからである。

一般的に、 $\mathbf{N}$ の部分集合は、最大値を持つかもしれないし、そうでないかもしれないが、常に最小値を持つだろう。(もちろん、もしそれが空集合でなければだが) これは、またとても重要な、別の「明らかな事実」である。

定理 4.7 $\mathbb{N}$ の全ての空でない部分集合 X は、最小元を持つ。

証明 もし X が空でないなら、 X はいくつかの要素 n を含む。なので、命題が真であることを示すために、全ての $n \in \mathbb{N}$ について真であることを示す必要がある。

$S(n)$: もし X が n を含むなら、 X は最小元を持つ。

強帰納法の原理を使う。もし X が 1 を含むなら、1 は X の最小元であるので、 $S(1)$ は真である。(この特性は、1 は $\mathbb{N}$ の最小元であることを述べている)

$1 \leq i \leq k$ に対して、 $S(i)$ が真であると仮定する。 X は $k+1$ を含むとする。2 つの場合について考える。

(1) すべての $x \in X$ に対して、 $x > k$ 。

(2) $y \leq k$ であるような $y \in X$ がある。

(1) の場合、 $k+1$ は X の最小元である。(2) の場合、帰納法の仮定によると、 $S(y)$ の真理値を仮定することができると言って、そしてそれは、 X が最小元を持つことを示している。どちらの場合も、 $S(k+1)$ が真であることを示すことができ、帰納法のステップが完了し、 $S(n)$ は全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して真である。 $\square$

4.8 どのようにして予想命題が定理になるか

前節では、問題の答えについての正しい推測をすることが、どのようにしたら可能になるかという例に時々遭遇し、そしてそれを帰納法の原理を用いて証明した。この節では、その種類の他の問題についての詳細を議論する。

例 エッセイコンテストでは、参加者は匿名で作品を提出し、それぞれの作家はコード化された識別用のバッジを持つ。バッジは、 $n\text{mm}$ の大きさの同一の四角いカードで作られる。 n は奇数で、両側が $1\text{mm} \times 1\text{mm}$ のサイズの小さい四角形の n^2 で作られる。これらの四角形のうちの 1 つに丸い穴がけられる。

b_n は、この方法で作ることのできる異なったバッジの数とし、カードは回したりひっくり返したりすることができることに注意する。 b_n の公式を探し、その公式を使って、もしもそのコンテストに 100 のエントリーが予想されるならば、どれくらいの大きさのカードが必要になるかを決定せよ。

解 いくつかのステージにわけて、問題を解く。

ステージ 1 試みる

n が奇数であることを話したので、 $n = 1, 3, 5$ の場合を調べることから始める。 $n = 1$ の場合、カードは 1 つだけ四角を持ち、穴はその中にあいてなければならない。したがって、 $b_1 = 1$ である。

$n = 3$ の場合、いくつかのスケッチが、本質的に異なるカードは 3 枚しかないことを確信させるだろう。 o を穴、 x を「穴ではない」として使うと、それらは、

o	x	x		x	o	x		x	x	x
x	x	x		x	x	x		x	o	x
x	x	x		x	x	x		x	x	x

である。他のどの 1 つ穴のカードも、回転させることで得られる。したがって、 $b_3 = 3$ である。

もう少しの仕事で、 $b_5 = 6$ であることがわかる。

ステージ 2 推測する

この状況を推測するための 2 つの明確な作戦がある。「大胆な」作戦は、すでにわかっている b_1, b_3, b_5 の値に基づいて、 b_n の公式を直接推測することである。これをするのが可能な場合もある。もしそうだとすれば、すぐにステージ 5 に移ることができる。そうでないならば、帰納的な定義を使った「安全な」作戦を試みたほうがいいだろう。

したがって、こう尋ねるべきである。 b_1 から b_3 、 b_3 から b_5 によって何をj得るだろうか？計算上、

$$b_3 = b_1 + 2, \quad b_5 = b_3 + 3$$

である。おそらく、 b_7 は $b_5 + 4 = 10$ であり、一般化すると、 $b_{2r+1} = b_{2r-1} + (r + 1)$ であるだろう。このステージでは、予想命題を得る。

ステージ 3 理解する

今、予想命題をテストしなくてはならない。これをする明らかな方法は、次のケース b_7 をチェックすることである。直接 $b_7 = 10$ という予測値をチェックすることもできるが、よりよい方法は、予想された関係 $b_7 = b_5 + 4$ を分析することである。

7×7 のカードと、 5×5 のカードの関係は、図 4.2 で示されている。図で示されているように、全ての 7×7 カードは、境界線をもつ 5×5 のカードとして考えることができる。よって、 5×5 の同一のカードは、それぞれ 7×7 の同一の、穴を持たない四角に対応する。 5×5 のカードの中に穴をあけずに、境界線より外側の四角の一つに穴をあけることで、もっと 7×7 の独自のカードを得ることができる。

本質的に異なる追加のカードをいくつ作ることができるだろうか？答えは、左上の隅の四角、すぐその右の四角、次の四角、またその次の四角に穴をあけることができる。しかし、それが全てである。その他のどの四角の穴も、これらの一つに同等なカードとなる。したがって、4 つの追加カードがあり、そして $b_7 = b_5 + 4$ を証明することができた。

今、ハードワークをする。まさに、同じ手法が $b_{2r+1} = b_{2r-1} + (r + 1)$ であることを示す。(自分で図を描いて見てほしい)

ステージ 4 公式

b_{2r+1} の公式を作ることを頼まれ、そして、今方程式でこれらの数を再帰的に定義できることを知っている。

$$b_1 = 1, \quad b_{2r+1} = b_{2r-1} + (r + 1) \quad (r \geq 1)$$

値 $b_1 = 1, b_3 = 3, b_5 = 6, b_7 = 10$ はすでに知っている。そして、もし必要ならば、もっと計算することができる。しかし、おそらく次に述べる式を見つけているだろう。

$$1 = (1 \times 2)/2, \quad 3 = (2 \times 3)/2, \quad 6 = (3 \times 4)/2, \quad 10 = (4 \times 5)/2$$

これは、予想命題を導く。

$$b_{2r+1} = \frac{1}{2}(r + 1)(r + 2) \quad (\text{すべての } r \in \mathbb{N} \text{ に対して})$$

ステージ 5 証明

予想された公式が正しいかどうかの証明はまだされていない。したがって、帰納法によって証明する。

定理 すべての $r \in \mathbb{N}$ に対して、

$$b_{2r+1} = \frac{1}{2}(r + 1)(r + 2)$$

が成り立つ。

証明 $b_3 = 3, \frac{1}{2}(1+1)(2+1) = 3$ であるので、 $r = 1$ のとき、公式は真である。 $r = k$ のとき真であると仮定する。すなわち、 $b_{2k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ である。ステージ 3 で発見した公式を使うと、

$$\begin{aligned} b_{2(k+1)+1} = b_{2k+1} + (k+2) &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + (k+2) \\ &= \frac{1}{2}(k+2)(k+3) \end{aligned}$$

したがって、公式は $r = k+1$ のとき成り立つ。よって、帰納法の原理より、全ての $r \in \mathbb{N}$ で成り立つ。

ステージ 6 解答

それは、実用的な質問への明確な答えを提供するときだけ、数学者によって行われたハードワークが感謝されるという悲しい現実である。ここでの「明確な答え」は、100 のエントリーをうまく処理するために必要なカードの大きさであり、すなわち、 $b_{2r+1} = (r+1)(r+2)/2 \geq 100$ に対する r の最小値である。答えは $r = 13$ で、したがって必要なカードは 27×27 ミリメートルである。□

5 関数

5.1 関数の概念

X と Y は集合とする。もし X のそれぞれの要素 x が Y の唯一の要素を指定することができるなら、 X から Y への関数 f を持つといい、 $f(x)$ で表す。この状況は、図 5.1 で描かれている。この図より、標準の表記を得る。

$$f: X \rightarrow Y$$

X から Y への関数 f を表している。

それは、 X の各々の要素 x と Y の一意的な要素 $f(x)$ を対応させる規則として f を考えるために役立つ。 $f(x)$ は通常、 x における f の値と呼ばれる。重要な点は、

- (1) $f(x)$ は X の全ての x に対して定義される。
- (2) X の全ての x に対して、ちょうど 1 つがある。

ことである。

初歩の数学において、最もよく知られた関数は、 X と Y が集合 $\mathbf{N}$ または数値の他のある集合である、というものである。この場合、関数を指定する最も簡単な方法は、公式によってそれを意味することである。例えば、ルール

$$f(n) = 3n + 4 \quad (n \in \mathbf{N})$$

は、値 n で $3n + 4$ となるような、 $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への関数 f を定義している。

$X = \mathbf{N}$ のとき、関数を指定する別の方法は、節 4.5 で述べた帰納的定義による手法である。節 4.5 では、 $\mathbf{N}$ における各々の n に対して、どのように u_n の数を定義するかについて説明した。明らかに、 u が $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への関数である場合、 u_n は $u(n)$ のただの代わりの表記である。例えば、関数 f は次のルールによって定義される。

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(n+1) = f(n) + f(n-1) \quad (n \geq 2)$$

節 4.5 の例 3 で言及したように、この関数の値はフィボナッチ数であり、最初の 9 個は 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 である。

よく、集合 $\mathbf{N}$ 上で定義された関数の値のリストを、数列として考える。

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

3 つのドットが最後に来ている場合、リストが無限に続くことを意味する。実際、数列は集合 $\mathbf{N}$ 上で定義された関数に対する、ただのもう一つの名前である。数列は、再帰的、または公式、または別の方法で定義できるだろう。しかし、どの場合も自然数 n それぞれに対する唯一の定義される要素を持たなければならない。

5.2 全射、単射、全単射

特別な名前をもつ関数の種類がある。

定義 もし、 Y の各々の元 y が、少なくとも 1 つの $x \in X$ の値 $f(x)$ であるならば、 X から Y への関数 f は全射 (surjection) である。もし、 Y の各々の元 y が、高々 1 つの $x \in X$ の値 $f(x)$ であるならば、 X から Y への関数 f は単射 (injection) である。単射と全射の両方を満たしていれば、関数は全単射である。つまり、もし、 Y の各々の元 y が、ちょうど 1 つの $x \in X$ の値 $f(x)$ であるならば、 X から Y への関数 f は全単射 (bijection) である。

例 1 集合 X と Y は、 $X = \{a, b, c, d, e\}$ 、 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。また、関数 $f : X \rightarrow Y$ 、 $g : X \rightarrow X$ 、 $h : Y \rightarrow X$ は次のように定義される。

$$\begin{array}{lll} f(a) = 3 & g(a) = b & h(1) = a \\ f(b) = 4 & g(b) = d & h(2) = c \\ f(c) = 2 & g(c) = e & h(3) = b \\ f(d) = 4 & g(d) = a & h(4) = e \\ f(e) = 1 & g(e) = c & \end{array}$$

どれが単射、全射、全単射だろうか？

解 図を描いてみるのが一番いい方法である。

Y の各々の元が、少なくとも 1 つの f の値に現れているので、関数 f は全射である。同様に、関数 g は全射である。しかしながら、元 $d \in X$ は h の値ではないので、 h は全射ではない。要素 4 が f の値に 2 回現れているので、関数 f は単射ではない。 $(f(b) = f(d) = 4)$ 一方、 g と h は両方単射である。

以上より、 g は全単射であるが、 f と h はそうではない。

□

例 2 式 $j(n) = 2n$ は、 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数 j を定義する。 j が全射ではないこと、そして、単射であることを示せ。

解 $j(n)$ は偶数 $2n$ なので、例えば 3 のような奇数は j の値にならない。したがって、 j は全射ではない。

j が単射であることを証明するために、 $j(n) = j(n')$ のとき、 n と n' が異なる数にならないことを示さなくてはならない。しかしこれは、暗に $2n = 2n'$ を示すであろう。そして、因数 2 は打ち消され、 $n = n'$ を得る。したがって、 $j(n)$ が特定の値を持つような高々 1 つの n が存在し、よって、 j は単射である。

□

例 2 で j が単射である証明に対して用いられているテクニックは、重要なものの 1 つである。関数 $f : X \rightarrow Y$ が単射であることを証明するために、

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

を示さなければならない。次に述べる定義は、よく役に立つ。

定義 ある集合 X に対して、関数 $i : X \rightarrow X$ は、全ての $x \in X$ に対して、 $i(x) = x$ で定義され、 X における恒等関数 (identity) と呼ばれる。

もし X が Y の部分集合なら、 $j(x) = x$ で定義される関数 $j : X \rightarrow Y$ は、 X から Y への包含関数 (inclusion) と呼ばれる。

恒等関数は全単射であることは明確であり、包含関数は単射である。

5.3 関数の合成

関数の役に立つ特性は、図 5.3 で示すように、それらは同じ状況下で結合することができる。もし X から Y への関数 f と、 Y から Z への関数 g を与えたならば、次に述べる方法で定義される、 X から Z への関数がある。 X の各々の元 x に対して、値 $f(x)$ が Y 中にあり、 $f(x)$ における g の値は、 Z の要素 $g(f(x))$ である。この 2 回のステップを 1 つのステップとして考えることで、 x から $g(f(x))$ への値をとる、 X から Z への関数を持つ。それは、関数 $f: X \rightarrow Y$ と関数 $g: Y \rightarrow Z$ の合成 (composite) と呼び、 gf と書く。したがって、

$$(gf)(x) = g(f(x))$$

gf は、「最初に f 、次に g 」を意味することをよく覚えておいたほうがいい、 gf は g と f の積の一種であるにも関わらず、その方法で考えることは、ミスリーディングとなる。もし、 X, Y, Z が異なる集合であれば、 gf は上記のように定義されるが、 fg は意味を持たない。たとえ gf と fg 定義されていても、同じになる理由はない。

次に述べる定理はとても役に立つ。

定理 5.3 もし $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ が単射ならば、 $gf: X \rightarrow Z$ も単射である。もし f と g が全射なら、 gf も全射である。もし f と g が全単射なら、 gf も全単射である。

証明 $gf(x) = gf(x')$ と仮定する。 $g(f(x)) = g(f(x'))$ 、 g は単射であるので、 $f(x) = f(x')$ 、 f は単射であるので、 $x = x'$ となる。ゆえに、 gf は単射である。

もし g が全射なら、 Z の任意の元を z とすると、ある元 $y \in Y$ に対して $z = g(y)$ を持ち、そしてもし f が全射なら、 $f(x) = y$ となる元 $x \in X$ が存在する。したがって、 $z = g(f(x)) = gf(x)$ 、そして gf は全射である。全単射に対する命題は、先行する 2 つの直接の結論である。

5.4 全単射と逆関数

この節では、全単射の概念に、異なる方法でどのようにアプローチするかについて説明する。

定義 関数 $f: X \rightarrow Y$ は、もし全ての $x \in X$ と $y \in Y$ に対して、

$$(gf)(x) = x, \quad (fg)(y) = y$$

であるなら、逆関数 (inverse) $g: Y \rightarrow X$ を持つ。言いかえると、 gf は X での恒等関数であり、 fg は Y での恒等関数である。(図 5.4)

図は、逆関数 g が f の効果で逆になることを明確にする。定義の式は、等式の形で書き換えられる。

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad g(y) = x$$

例 $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c, d\}$ とする。

$$f(1) = b, \quad f(2) = d, \quad f(3) = c, \quad f(4) = a$$

とすると、次に述べる関数 g は f に対する逆関数である。

$$g(a) = 4, \quad g(b) = 1, \quad g(c) = 3, \quad g(d) = 2$$

□

全ての関数が逆関数を持つわけではないが、もし 1 つあればそれは一意である。もし $f : X \rightarrow Y$ が与えられ、 g と g' は両方とも f の逆関数に対する条件を満たすとすると、(特定の) $g'f$ は X の恒等関数であり、 fg は Y の恒等関数である。よって、

$$g = (g'f)g = g'(fg) = g'$$

したがって、 $g = g'$ である。そして、逆関数は唯一である。

この議論は、(もし存在するなら) f の逆関数についての話の正しさを証明し、唯一の逆関数に対して f^{-1} という表記を使う。定義から、 f^{-1} の逆は f 、すなわち、 $(f^{-1})^{-1} = f$ であるのは当然である。

定理 5.4 関数が逆関数を持つための必要十分条件は、全単射であることである。

証明 f は X から Y への全単射とする。 Y の各々の y に対して、 $f(x) = y$ となるようなちょうど 1 つの $x \in X$ がある。式 $g(y) = x$ は、 f の逆関数である Y から X への関数を定義する。

反対に、 f は逆関数 f^{-1} をもつと仮定する。与えられた $y \in Y$ は $f(f^{-1}(y)) = y$ であることを知っているため、 $x = f^{-1}(y)$ を挿入すると、 $f(x) = y$ を得る。したがって、 f は全射である。 f がまた単射であることを示すために、 $f(x) = f(x')$ と仮定する。等式の両側に f^{-1} を適用すると、結果として必要に応じた $x = x'$ を得る。

□

6 どのように数えるか

6.1 全単射として数える

この文章にはいくつの単語が含まれているだろうか？おそらく、以下に述べるような方法で、その質問に答えよう。

How	many	words	are	there	in	this	sentence
1	2	3	4	5	6	7	8

実際には、通常は、順番に物を指し示して、1, 2, 3, ... と数を言って、最後の1つに到達したらやめる。この「指し示して数え上げる」手法は、実際には、文章中の単語の集合から、集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ への関数の解釈である。かなり重要な点は、関数は全単射である、ということである。なぜなら、それぞれの単語はちょうど1回「数えられて」いるからである。

自然数 m を、 $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$ とする。この表記を用いて、暫定的定義を構成する。

S は m 個の要素を持つ は、 S から N_m への全単射が存在する を意味する。

定義は暫定的である。なぜなら、1つの目立った問題があるからである。こう尋ねたと仮定する。図 6.1 に描かれる集合 S はいくつの要素を持つか？ある人とある人で、異なった答えにたどり着きそうである。例えば、あなたは 47 と主張し、私は 49 と言うかもしれない。

もちろん、単に定義が不十分であるために、異なった答えとなってしまうことには賛成である。我々のどちらか、あるいはおそらく両方が、いくつかの点を見逃す、または同じものを2回数えているのであろう。それにもかかわらず、一意的な答えがあることを証明できない。そこで、いわゆる「鳩の巣原理」を必要とする。これについては、次節で議論する。

ここで注意すべきは、全単射は逆関数を持っているので、暫定的定義は、 N_m から S への全単射が存在するということと同値である。確かに、 N_m と S の間の全単射的な対応について話すべきである。

6.2 集合の大きさ

オフィスで、14 人の人が働いていると仮定する。そして、15 通の手紙の山が配達された。それぞれの手紙は、オフィスの人の1人にあてられている。そして、手紙は対応する鳩の巣の中に入れられる。その時、確実に誰かが幸運になり、1つ以上の手紙を手にするを知る。一般的に、もし $n > m$ で、 n 通の手紙が m 個の鳩の巣に入れられるなら、1つの鳩の巣は1つ以上の手紙を受け取る、ということは自明であることのように思える。

もしその命題が自明であるなら、その対偶もまたそうでなくてはならない。なぜなら、2つは論理的同値であるからである。対偶は、もし全ての鳩の巣が高々1つの手紙を受け取るなら、 $n \leq m$ である。

今、この原理の奇麗な数学的形式で公式化することができ、手紙は $1, 2, \dots, n$ の数がつけられていると仮定し、鳩の巣は $1, 2, \dots, m$ の数がつけられているとする。一通の手紙ごとに、その宛名がどの鳩の巣が手紙を受け取るかを教えてくれる。したがって、数学的用語を用いれば、手紙を鳩の巣に割り当てるルールが存在し、そしてそれは集合 N_n から集合 N_m への関数である。(図 6.2) 全ての鳩の巣が高々1つの手紙を受け取るという条件は、この関数が単射であるという条件と同値である。

したがって、元の命題の対偶形式は、本質的に次のようになる。もし関数 $N_n \rightarrow N_m$ が単射なら、 $n \leq m$ となる。今、証明すべき事柄を知った。

定理 6.2.1 m は自然数とする。次に述べる命題は、全ての自然数に対して真である。もし N_n から N_m への単射が存在するならば、 $n \leq m$ である。

証明 帰納法の原理を用いる。

全ての自然数 m に対して、 $1 \leq m$ なので、 $n = 1$ のとき命題は真である。

帰納法の仮定は、 n が特定の値 $k \geq 1$ をとるときに、命題は真である、ということである。 $n = k + 1$ のとき真であることを推論する。

$j : N_{k+1} \rightarrow N_m$ は単射であると仮定する。 $k + 1 \geq 2$ であるので、(単射の定義より) m は 1 にはならない、という結果になる。よって、ある自然数 S に対して $m = s + 1$ である。 $k + 1 \leq m = s + 1$ を示すために、単射 $j^* : N_k \rightarrow N_s$ を構成し、 $k \leq s$ という結論を出すために、帰納法の仮定を使う。

2つの場合がある。

ケース 1 全ての $x \in N_k$ に対して、 $j(x) \neq s + 1$ と仮定する。そのとき、すべての $x \in N_k$ に対して、 j^* は、 $j^*(x) = j(x)$ で定義される単射とする。

ケース 2 (図 6.3 参照) $j(x) = s + 1$ であるような $x \in N_k$ が存在すると仮定する。そのとき、 $y \neq s + 1$ の場合、(j は単射であるため) $j(k + 1) = y$ である。この場合、 j^* は以下のように定義される。

$$j^*(x) = y, \quad j^*(z) = j(z) \quad (z \neq x)$$

j^* が単射であることをチェックするのは簡単である。 □

定理は、もとの命題の対偶形式である。

もし $n > m$ ならば、 N_n から N_m への単射は存在しない。

これが、鳩の巣原理 (pigeonhole principle) と表現するものである。

節 6.4 では、鳩の巣原理の面白い応用について議論したい。しかし、まず最初に節 6.1 の質問へ戻る。集合 S において、なぜ S を数えるときに常に同じ答えを得て、どのような方法でカウントを行うだろうか？ m の一意的な値を決定する定義を示すために、鳩の巣原理を使う。

定義 もし S と N_m の間に、全単射的な対応があるなら、 S はサイズ (size)、または濃度 (cardinality) を持つ、といい、 m を用いて、

$$|S| = m$$

と書く。

定理 6.2.2 もし集合 S が、 $|S| = s$ 、 $|S| = t$ なら、 $s = t$ である。

証明 全単射 $f : S \rightarrow N_s$ と $g : S \rightarrow N_t$ があると仮定する。全単射 g は逆関数 g^{-1} を持ち、合成関数 fg^{-1} は N_t から N_s への全単射である。特に、それは単射で、前の定理より $t \leq s$ である。同様に、 gf^{-1} は反対方向に全単射であり、よって $s \leq t$ であり、したがって $s = t$ である。 □