

# 光学薄膜の理論 (基礎編)

げじおか

最終更新 2012.01.03

## 概要

この文章は光学薄膜の理論の基礎についてまとめたものです。著者は光学薄膜を学んでいる初心者です。ただ勉強しながら学んだことや自分で考えたなどをまとめただけです。だから間違いはたくさんあると思います…。なお、この文書には、特定の企業・団体がノウハウとして秘密にしている内容などは一切載っておりません。ちなみに、この文書は $\text{L}_\text{A}\text{T}_\text{E}_\text{X}$ で作りました。

基礎編は「3つの仮定」から光学薄膜の基礎理論を構成するという内容になっています。ここでいう「仮定」とは、数学で言えば「公理」に相当するもので、証明無しに正しいと認める基本的な前提であり、理論の出発点になります。ここで出てくる「3つの仮定」は、実は波動光学ではMaxwell方程式から導かれるべきものでもあるので、波動光学の範囲では「定理」になります。ただ、光学薄膜に限定して理論を構成する際は、Maxwell方程式まで遡らずに「仮定」としてしまった方がシンプルな理論になるので、ここでは「仮定」として理論を構成しました。

## 参考文献

1. 小檜山光信 『光学薄膜フィルターデザイン』 (オプトロニクス社)
2. H. A. Macleod: Thin-Film Optical Filters (Macmillan)
3. 大津元一 『光学入門』 (朝倉書店)

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>3</b>
1.1	光学薄膜とは	3
1.2	光学薄膜理論の仮定	4
1.3	光学薄膜理論における計算の進め方	6
<b>2</b>	<b>単一界面の反射・透過</b>	<b>8</b>
2.1	単一界面での反射・透過 [吸収なし ( $k = 0$ )]	8
	位相部分の関係 Snell's law	8
	振幅の関係 [垂直入射]	9
	振幅の関係 [斜入射]	11
2.2	単一界面での反射・透過 [一般]	17
	垂直入射	17
	斜入射	18
<b>3</b>	<b>計算手法 1 多重反射の重ね合わせ</b>	<b>21</b>
3.1	概要	21
	各界面を反射・透過するときの係数	23
	各層を通過するときの取り扱い	23
3.2	コヒーレンス長	24
3.3	具体例：単層膜の反射・透過	24
3.4	非対称透過膜はあるか？	27
<b>4</b>	<b>計算手法 2 特性マトリクス</b>	<b>30</b>
4.1	特性マトリクスとは	30
4.2	特性マトリクスの導出	31
4.3	単層膜への応用	32
4.4	多層膜への応用	34
4.5	非対称透過膜はあるか？ [再考]	36
4.6	ポテンシャル透過率	37

# 1 序論

## 1.1 光学薄膜とは

光学薄膜とは何でしょうか。まず、「光学」とは光を扱う学問のことです。次に、「薄膜」とは薄い膜のことです。厚さにしていただきたい $10\mu\text{m}$  くらいまでの膜を薄膜と言うそうです。なので「光学薄膜」とは「光をコントロールするための薄膜」ということになるのでしょうか。

ではどう光をコントロールするのでしょうか。ここでは「光の干渉」という現象を利用した薄膜を光学薄膜と言うことにします<sup>1</sup>。「光の干渉」を利用すれば、光の反射を抑えたいいわゆる「反射防止膜」などをつくることができます<sup>2</sup>。ではそもそも「光の干渉」とは何でしょうか。

そもそも光とは電磁波です。電磁波とは電場と磁場の波のことです。波なので、波同士を重ね合わせたときに打ち消し合ったり、強め合ったりします<sup>3</sup>。それが光の干渉です。光の干渉は、実際の光学薄膜において次のように利用されます。薄膜を何層か積み重ねれば、層間の界面がいくつかできます。そこに光を入射させるとは界面で反射光と透過光に別れ、薄膜の中を多重反射しながら膜の両側に出てきます。例えば、多層の膜を通過してきた光たちは強め合うように(多層の膜を通過せず戻ってきた光たちは弱め合うように)設計すれば、反射の小さい「反射防止膜」ができます。

ところで、光は波というからにはその波長で特徴づけられることになります。光学薄膜では主に近紫外線(波長 $200\text{nm}\sim 400\text{nm}$ 程度)-可視光(波長 $400\text{nm}\sim 800\text{nm}$ 程度)-近赤外線(波長 $800\text{nm}\sim 2500\text{nm}$ 程度)を扱うことになり、光学薄膜の厚さもだいたいこの波長と同じオーダーで設計されます。材料や膜厚などを適切にデザインすれば、ある波長領域の光を透過させてその他を反射させるフィルタや、広い波長領域で反射の強いミラーなどをつくることができます。

まとめ：光学薄膜とは

光学薄膜とは、光の干渉を利用し、  
光の反射・透過(の波長依存性)をコントロールする薄膜である。

さて次の章からいよいよ光学薄膜の理論の中身に突入します。なお、この文書は、特に断りがなければ SI 単位系を用いて記述してあります。

<sup>1</sup>光のコントロール方法には、自ら発光したり吸収したりなど、いろいろなものがありますが、ここでは光の干渉に焦点を当て、光の干渉を利用するための薄膜を光学薄膜と呼びます。

<sup>2</sup>これは例えばメガネのレンズなどに使われています。

<sup>3</sup>子供だましな表現ですが...

## 1.2 光学薄膜理論の仮定

光学という学問は扱う領域によって、幾何光学、波動光学、量子光学に分類されます。その中で光学薄膜の理論は波動光学に基づいて展開されます。波動光学とは、主に光を波動として捉えて諸現象を説明する学問で、古典電磁気学に基づいていると良いでしょう。そのため、古典電磁気学の基礎方程式である Maxwell 方程式から導いてきた式を使って理論展開することになります。しかし、ここでは Maxwell 方程式まで遡らずに、光学薄膜の理論を展開できるような仮定 (出発点)<sup>4</sup>を 3 つ用意しました。Maxwell 方程式からの導出は補遺に回すことにします。

### 仮定① 光 (電磁波) の記述

光が進む媒質は複素屈折率  $N$  で特徴付けられ、その媒質中を進む振動数  $\nu = \omega/2\pi$  の光は、電磁場

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{e}} \mathcal{E} \exp [i(\omega t - (2\pi N/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x})] \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{h}} \mathcal{H} \exp [i(\omega t - (2\pi N/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x})] \end{cases} \quad (1)$$

で記述できる (計算は複素数で行うが、実際に観測される現象と比較するのは実部分のみになる。複素数の方が数式にまとめやすいので便宜上、複素数を用いて計算する)。ここででてきたパラメータの定義は以下の通り。

- $\omega$  : 角振動数、 $\lambda$  : 真空中での光の波長 ( $\lambda = 2\pi c/\omega$ )
- $\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{h}}$  : 電場および磁場の振動方向を表す単位ベクトル ( $\hat{\mathbf{e}}$  に平行な軸をこの光の偏光方向という。)
- $\hat{\mathbf{s}}$  はこの光の進行方向を表す単位ベクトル
- $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  : 電場および磁場の複素振幅 (exp 中の定数の位相の情報は  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  に押しつけてしまう)

また、電場と磁場の振動方向および振幅については、

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{e}} \quad (3)$$

$$\mathcal{H} = y\mathcal{E} \quad (4)$$

の関係式が成り立つ。ここで  $y$  は媒質の光学アドミッタンスであり、真空の光学アドミッタンス  $Y_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$  ( $\epsilon_0, \mu_0$  はそれぞれ真空の誘電率と透磁率) に複素屈折率  $N$  を掛けたものである ( $y = Y_0 N$ )。

一般の光は (1) のいろいろな振動数  $\omega$ 、偏向方向  $\hat{\mathbf{e}}$ 、進行方向  $\hat{\mathbf{s}}$ 、振幅  $\mathcal{E}$  について重ね合わせて表せるはずである (これらが決まれば  $\lambda, \hat{\mathbf{h}}, \mathcal{H}$  は自動的に決まる)。

<sup>4</sup> 「仮定」、と言っても本来 Maxwell 方程式から導出すべきものなので、物理学の枠組みの中では「定理」になります。

複素屈折率  $N$  を、実数  $n, k$  を用いて、

$$N = n - ik \quad (5)$$

とかくと<sup>5</sup>、(1) 式は、

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{e}} \mathcal{E} \exp[-(2\pi k/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x}] \exp[i(\omega t - (2\pi n/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x})] \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{h}} \mathcal{H} \exp[-(2\pi k/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x}] \exp[i(\omega t - (2\pi n/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x})] \end{cases} \quad (6)$$

とかけます。 $k \neq 0$  のときは  $\mathbf{x}$  について指数関数で減衰する因子  $\exp[-(2\pi k/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x}]$  が残り、これは媒質に吸収があることを示します。媒質に吸収が無いとき ( $k = 0$ )、(6) 式は電磁場の平面波

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{e}} \mathcal{E} \exp[i(\omega t - (2\pi n/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x})] \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{h}} \mathcal{H} \exp[i(\omega t - (2\pi n/\lambda)\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x})] \end{cases} \quad (7)$$

のようかけます。減衰を表すという意味で、 $k$  を消衰係数といい、また  $n$  を単に屈折率といいます。なお、真空は  $n = 1, k = 0$  です。

ここで簡単のため、光の伝播方向を  $x$  方向に取ります ( $\hat{\mathbf{s}} = (1, 0, 0)$ )。すると (7) の電場の式は、

$$E(x, t) = \mathcal{E} \exp[i(\omega t - (2\pi n/\lambda)x)] \quad (8)$$

と書けます。この平面波の位相が  $\phi$  で一定となる位置は時間とともに推移し、 $\omega t - (2\pi n/\lambda)x = \phi$  を満たします。これから  $dx/dt = c/n$  が導けます。これは屈折率  $n$  の媒質中では光の位相速度が  $c/n$  となることを表しています。

この光の進行方向および電場、磁場の振動方向は、(2)(3) 式から互いに垂直になることが分かります (図 1)。

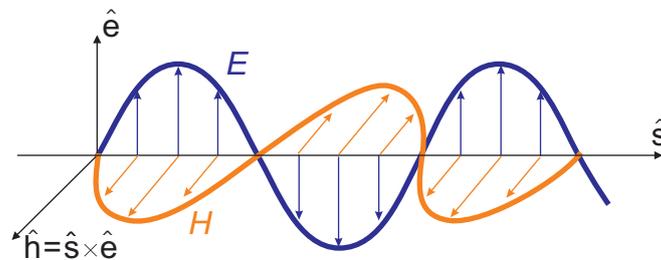


図 1: 電場と磁場の振動方向の関係

(4) 式は電場と磁場の振幅の関係を表しています。電場と磁場の振幅をつなぐ係数を光学アドミッタンスと呼び、光学アドミッタンス  $y$  は真空の光学アドミッタンス  $Y_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$  と複素屈折率  $N$  の積 ( $y = Y_0 N$ ) となります。実はこの関係式が成り立つのは媒質の比透磁率が 1 のときのみですが、今回扱う波長の範囲 (近紫外 ~ 近赤外) ではほとんどの物質で比透磁率は 1 と考えていいのです。

<sup>5</sup>一般に複素屈折率  $N$  は、電磁場の周波数に依存し、 $N(\omega) = n(\omega) - ik(\omega)$  とかけます。

### 仮定② エネルギーの流れ

周波数  $\omega$  の光のエネルギーの流れは、単位時間、単位面積あたり、

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (9)$$

である。この電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{H}$  は周波数  $\omega$  の光について重ね合わせたものである。

後に反射率、透過率などを計算するとき用いることになる式です。注意しなくてはならないのが、(9) 式が非線形であるということです。すなわち、(1) 式で表される光たちを重ね合わせてから (9) 式で計算した結果と、重ね合わせる前にそれぞれ (9) 式で計算して足した結果は一般には異なります。正しいのは重ね合わせてから (9) 式で計算する方です。ただし、周波数の異なる平面波については (9) 式で計算した後に足し合わせることでエネルギーの流れが正しく導出できます<sup>6</sup>。

(1) 式で表される単一の波の場合、 $\mathbf{I}$  の向きは波の進行方向  $\hat{\mathbf{s}}$  と一致します。また、(1) 式の磁場の式を (9) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{1}{2} \text{Re}(y \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \hat{\mathbf{s}} \\ &= \frac{1}{2} n Y_0 |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (10)$$

となります。これは簡単に書くと、

$$\mathbf{I} \propto n (\text{電場の振幅})^2$$

となります。(10) 式に  $\mathbf{E}$  についての表式 (6) を代入してさらに計算を進めると、

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} n Y_0 |\mathcal{E}|^2 \exp((-4\pi k/\lambda) \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x}) \hat{\mathbf{s}} \quad (11)$$

となります。

### 仮定③ 電磁場の境界条件

薄膜の界面で、電場および磁場の、界面に平行な成分は連続である。

この仮定については特に補足説明は無いのですが...

以上の仮定①～③を使って光学薄膜の理論を展開していくこととなります。

## 1.3 光学薄膜理論における計算の進め方

ここでは光学薄膜理論における計算の進め方を説明します。ここでは計算の対象となる薄膜系の構成は既に決定していて (図 2)、入射波と反射・透過波の位相、振幅、運ぶエネルギーの関係 (反射率、透過率) を求めることを目的とします。

<sup>6</sup>これは、実は (9) 式が時間平均した結果の式であることに由来します。時間平均を取る際、周波数の異なる平面波を掛け合わせて時間で積分するとその項は消えます。

その前にいくつか仮定をしておきましょう。まず簡単のため入射媒質に吸収が無視できるくらい小さい ( $k = 0$ ) と限定します。それでも現実の問題のほとんどの場合に適用できます。もっと言うと大抵の場合、入射媒質は空気 ( $n = 1, k = 0$ ) です。

計算を進める前に、まず入射波の設定をします。入射波を (1) 式で表される平面波とし、その平面波の波長、電場の振幅、薄膜系に対する入射角 ( $\lambda_i, \mathcal{E}_i, \theta_0$ ) を設定します。これによって同時に角周波数  $\omega$ 、磁場の振幅  $\mathcal{H}$ 、平面波の進行方向  $\hat{s}$  も決まります。薄膜系の構成は決定済みなので、 $N$  は既に決定済みです (ただし  $k = 0$ )。あとは  $\hat{e}$  を決めれば良いのですが、p 偏光、s 偏光というものを考えます。p 偏光とは図で言うと電場の振動方向が紙面に対して平行で、s 偏光とは垂直であることを指します (図 2)。入射波が p 偏光の場合、s 偏光の場合それぞれについて計算を進めて、結果を適切に重ね合わせれば、任意の偏光に対する計算結果が得られます。

入射波を設定した後、仮定③を使えば反射波、透過波の振幅や進行方向が決定されます。すると入射波との位相、振幅、運ぶエネルギーの関係が分かります。あとは薄膜系の実際の使用方法 (光源、角度など) に合わせて、様々な入射波の設定 ( $\lambda_i, \mathcal{E}_i, \theta_0$ ) について計算を繰り返せば良いのです。周波数 (波長) が異なれば、(9) 式での計算は独立して行えるので、ある周波数 (波長) の光を考えると、他の周波数 (波長) の光の存在は気にせず独立して計算できます。

次からの章では計算前にいちいち「入射波の各パラメータを ( $\lambda_i, \mathcal{E}_i, \theta_0$ ) に設定する」のように明確に宣言はしないこともありますが、暗黙のうちに設定をしていると考えてください。

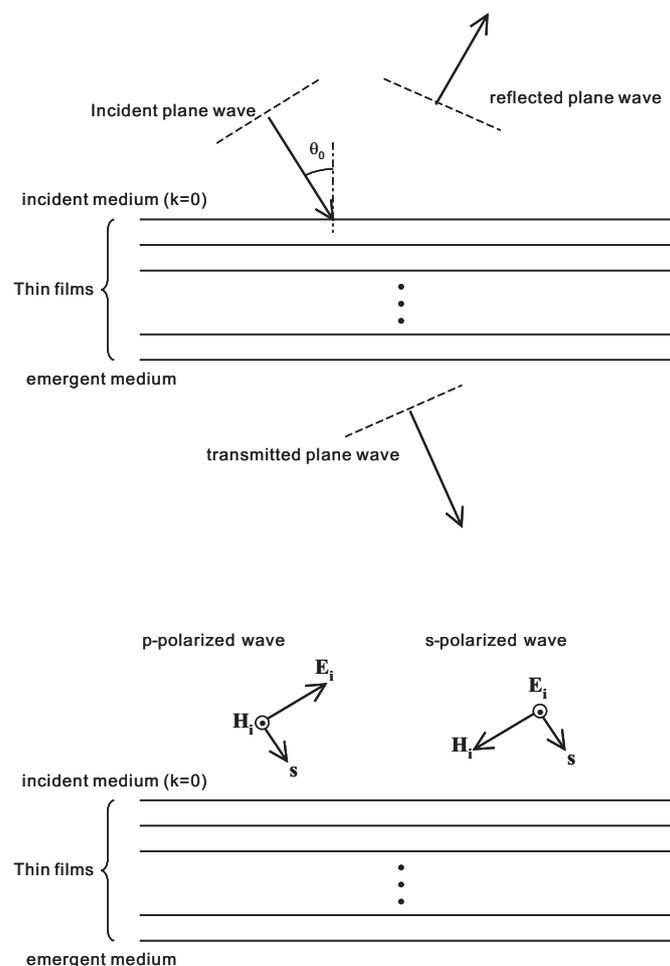


図 2: 薄膜系

## 2 単一界面の反射・透過

### 2.1 単一界面での反射・透過 [吸収なし ( $k = 0$ )]

単層膜や多層膜の話に入る前に、まずは単一の界面での光の反射・透過について考えていきます。まずは入射波、反射波、透過波の位相部分について考察し、次に振幅部分について考えていきます。

位相部分の関係 Snell's law

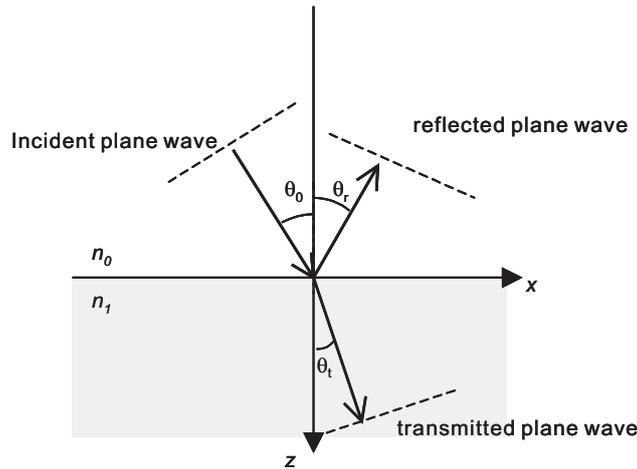


図 3: 単一界面への入射と反射・透過

屈折率  $n_0$  の媒質から屈折率  $n_i$  の媒質に光が入射する場合を考えます ( $n_0, n_i$  は実数)。まず界面をデカルト座標で  $z = 0$  平面にします (図 3)。入射平面波の進行方向を  $\hat{s} = (\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0)$ 、角周波数を  $\omega_i$ 、波長を  $\lambda_i$  と設定しましょう。すると、

$$\text{入射波の位相部分} : \exp \left[ i \left( \omega_i t - \frac{2\pi n_0}{\lambda_i} (x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0) \right) \right]$$

となります。同様に反射平面波の進行方向を  $(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ 、角周波数を  $\omega_r$ 、波長を  $\lambda_r$ 、透過平面波の進行方向を  $(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)$ 、角周波数を  $\omega_t$ 、波長を  $\lambda_t$  と置きましょう。すると、

$$\text{反射波の位相部分} : \exp \left[ i \left( \omega_r t - \frac{2\pi n_0}{\lambda_r} (\alpha_r x + \beta_r y + \gamma_r z) \right) \right]$$

$$\text{透過波の位相部分} : \exp \left[ i \left( \omega_t t - \frac{2\pi n_1}{\lambda_t} (\alpha_t x + \beta_t y + \gamma_t z) \right) \right]$$

となります。ただし、それぞれに含まれる定数の位相部分は、複素振幅に押しつけてしまいます。

仮定③を満たすためには、 $z = 0$  でいかなる時刻  $t$  および位置  $x, y$  についても、位相部分の値が等しくなる必要があり、そのためには、

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega & (\text{周波数は変わらない}) \\ \lambda_i = \lambda_r = \lambda_t \equiv \lambda & (\text{真空中での波長は変わらない}) \\ \beta_r = \beta_t = 0 & (\text{反射波、透過波の進行方向も入射波と同じ平面内}) \end{cases} \quad (12)$$

であることが要求されます。また、 $x$  の係数の比較から、

$$n_0 \sin \theta_0 = n_0 \alpha_r = n_1 \alpha_t \quad (13)$$

図 3 のように反射角  $\theta_r$ 、屈折角  $\theta_t$  を定義すると、 $\alpha_r = \sin \theta_r$ 、 $\alpha_t = \sin \theta_t$  なので、

$$\begin{aligned} n_0 \sin \theta_0 &= n_0 \sin \theta_r = n_1 \sin \theta_t \\ \implies &\begin{cases} \theta_0 = \theta_r \\ n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_t \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

(14) の第 1 式は入射角と反射角が等しいことを表す。第 2 式は Snell の法則と呼ばれる式です。ここで、平面波の進行方向を表すベクトルは単位ベクトルであることを思い出すと、

$$\begin{cases} \alpha_r^2 + \gamma_r^2 = 1 \\ \alpha_t^2 + \gamma_t^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma_r = -\cos \theta_0 \\ \gamma_t = \cos \theta_1 \end{cases}$$

となります (反射波、透過波の進行方向を考慮し符号を決めた)。

#### 振幅の関係 [垂直入射]

図 4 のように屈折率  $n_0$  (光学アドミッタンス  $y_0 = n_0 Y_0$ ) の物質と屈折率  $n_1$  (光学アドミッタンス  $y_1 = n_1 Y_0$ ) の物質の界面を  $z = 0$  の平面に取ります。入射波、透過波の進行方向を  $z$  軸に沿って正方向にとり、反射波を負方向にとります。垂直入射の場合 s 偏光と p 偏光の区別はできません。入射波の電場の振動方向を  $x$  正方向にとると、仮定③を満たすためには透過波、反射波ともに電場の振動方向は  $x$  軸に沿った方向にならなければいけません。入射、反射、透過波の電場の振幅を  $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_r, \mathcal{E}_t$  及び磁場の振幅  $\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_r, \mathcal{H}_t$  とします。電場の正方向を  $x$  軸正方向に、磁場の正方向を入射波、透過波に関しては  $y$  軸正方向に、反射波については  $y$  軸負方向に取ります (図 4)。

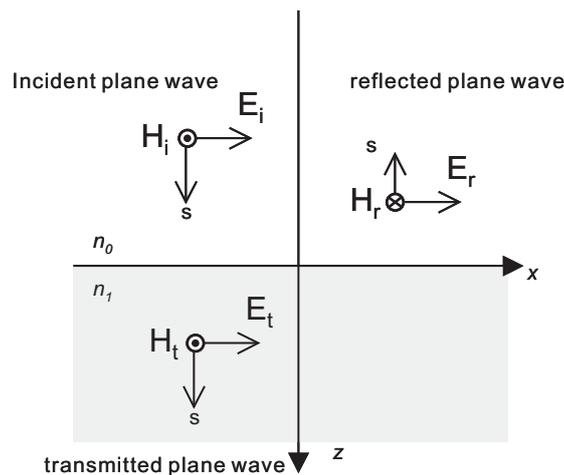


図 4: 電場、磁場の正方向の定義

すると、 $z = 0$  の界面において仮定③を満たすために、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r &= \mathcal{E}_t \\ \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_r &= \mathcal{H}_t \implies y_0(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r) = y_1 \mathcal{E}_t \end{aligned}$$

が成り立つ必要があります。ここから

$$\rho \equiv \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} = \frac{y_0 - y_1}{y_0 + y_1} = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \quad (15)$$

$$\tau \equiv \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} = \frac{2y_0}{y_0 + y_1} = \frac{2n_0}{n_0 + n_1} \quad (16)$$

と計算できます。 $\rho, \tau$  をそれぞれ振幅反射率、振幅透過率と呼ぶことにします。(16) 式を見ると、 $\tau$  は常に実数で正であることが分かります。界面を透過しても電場の位相が変化しないことが分かります。一方、 $\rho$  の式 (15) を見ると、 $n_0 > n_1$  のときは正、 $n_0 < n_1$  のときは負となることが分かります。これは反射することにより、 $n_0 > n_1$  のときは電場の位相は変化せず、 $n_0 < n_1$  のときは  $\pi$  変化することを表します。蛇足ですが、位相部分も含めて書き下すと、界面 ( $z = 0$ ) で電場は

$$\begin{aligned} E_i &= \mathcal{E}_i \exp[i\omega t] \\ E_r &= \mathcal{E}_r \exp[i\omega t] \\ E_t &= \mathcal{E}_t \exp[i\omega t] \end{aligned} \quad (17)$$

と書けます。 $\mathcal{E}_i$  を実数で正とすると、 $n_0 < n_1$  のときは  $\mathcal{E}_r$  は負、 $\mathcal{E}_t$  は正となります。入射波、透過波の位相は  $z$  正方向に、反射波は  $z$  負方向に伝播することを考えると、振動の様子は図 5 のようになります。

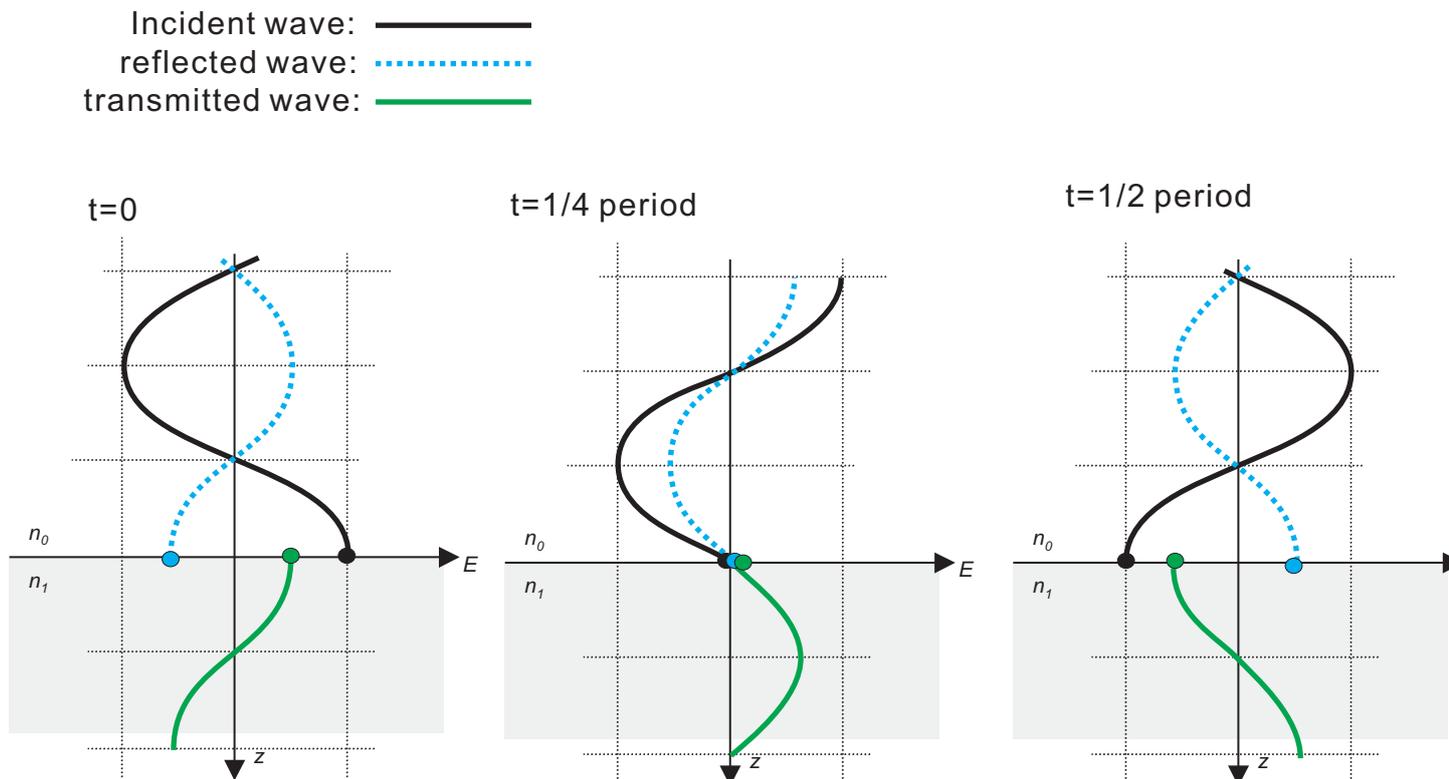


図 5:  $n_0 < n_1$  のときの振動の様子。各波の界面の振動を  $\bullet$  で表した。界面では入射波と透過波は同位相で振動し、反射波は逆位相となる。

つぎにエネルギーの流れを考えてみましょう。物質 1 から界面に単位面積、単位時間あたり流れ込むエネルギーは、仮定②より、

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r)(y_0 \mathcal{E}_i - y_0 \mathcal{E}_r)^* \right] = \frac{1}{2} y_0 \mathcal{E}_i^2 - \frac{1}{2} y_0 \mathcal{E}_r^2 \quad (18)$$

となります。これは入射波のみ存在した場合のエネルギーの流れ  $I_i = \frac{1}{2} y_0 \mathcal{E}_i^2$  と、反射波のみ存在した場合のエネルギーの流れ  $I_r = \frac{1}{2} y_0 \mathcal{E}_r^2$  を足し合わせたものになっております。本来、エネルギーの流れの式 (44) は非線形なので、同一周波数の電場と磁場を重ね合わせた後のトータルの電場と磁場を (44) 式に入れて計算しなくてはなりません。しかし今回のような場合、入射波のエネルギーの流れと反射波とエネルギーの流れは独立して計算し、後から重ね合わせて良いこととなります。ここでエネルギーの反射率  $R$  は、

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \frac{\mathcal{E}_r^2}{\mathcal{E}_i^2} = \rho^2 = \left( \frac{y_0 - y_1}{y_0 + y_1} \right)^2 = \left( \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2 \quad (19)$$

となります。一方、界面から単位面積、単位時間あたり流れ出すエネルギーは、透過波のエネルギーの流れに相当し、仮定②より、

$$I_t = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_t (y_1 \mathcal{E}_t)^* \right] = \frac{1}{2} y_1 \mathcal{E}_t^2 \quad (20)$$

となります。なのでエネルギーの透過率  $T$  は、

$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{y_1 \mathcal{E}_t^2}{y_0 \mathcal{E}_i^2} = \frac{y_1}{y_0} \tau^2 = \frac{4y_0 y_1}{(y_0 + y_1)^2} = \frac{4n_0 n_1}{(n_0 + n_1)^2} \quad (21)$$

となります。計算すると  $R + T = 1$  となっており、これは界面に入るエネルギーと、界面から出て行くエネルギーが等しいことを表します。

## 振幅の関係 [斜入射]

斜入射の場合、p 偏光、s 偏光に分けて考える必要があります。p 偏光は電場が入射面に平行 (parallel) で、s 偏光は垂直 (senkrecht) であると定義されます (図 6)。

ここで傾斜アドミッタンス  $\eta$  というものを定義します。定義は、

$$\eta = \frac{\text{磁場の界面に平行な成分}}{\text{電場の界面に平行な成分}} \quad (22)$$

です。ここから電場および磁場の界面に平行な成分をとったときの振幅を  $E'$ ,  $H'$  のように'をつけて表記しましょう。入射角、反射角、屈折角などを  $\theta$  とすると、p 偏光、s 偏光の傾斜アドミッタンス  $\eta_p, \eta_s$  は、

$$\eta_p = \frac{H'}{E'} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E} \cos \theta} = \frac{y}{\cos \theta}, \quad \eta_s = \frac{H'}{E'} = \frac{\mathcal{H} \cos \theta}{\mathcal{E}} = y \cos \theta$$

となります。この傾斜アドミッタンスを使うことで、p 偏光か s 偏光かに関わらず垂直入射と同じように計算できるようになります。ここから入射波が p 偏光か、s 偏光のどちらかに指定します。どちらの偏光においても、 $z = 0$  の界面において仮定③を満たすために、

$$\begin{aligned} E'_i + E'_r &= E'_t \\ H'_i + H'_r &= H'_t \implies \eta_0 (E'_i - E'_r) = \eta_1 E'_t \end{aligned}$$

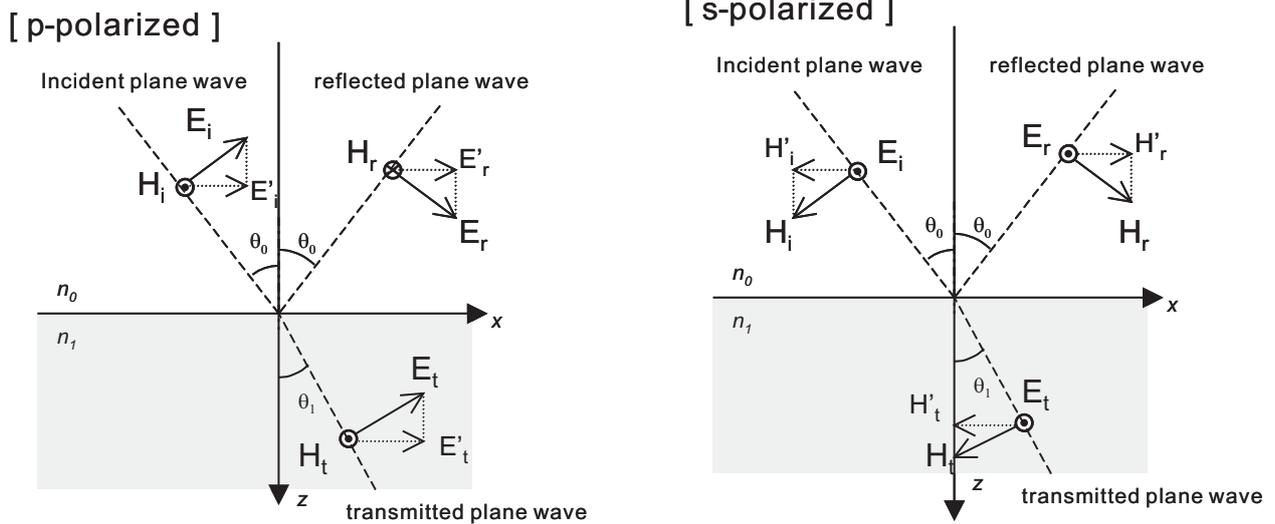


図 6: p 偏光と s 偏光

が成り立つ必要があります。 $\eta_0, \eta_1$  は物質 0,1 の傾斜アドミッタンスで、p 偏光か s 偏光かで値が異なります。垂直入射のときと同様に計算すると、振幅反射率  $\rho$ 、振幅透過率  $\tau$  が求まります。

$$\rho = \frac{E'_r}{E'_i} = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \quad (23)$$

$$\tau = \frac{E'_t}{E'_i} = \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_1} \quad (24)$$

一般の偏光状態を考えると、s 偏光と p 偏光の重ね合わせと考えれば良いです。  $\mathbf{E} = a\mathbf{E}_s + b\mathbf{E}_p$  のように重ね合わせたとき、エネルギーの流れは、

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{1}{2} \text{Re}[(a\mathbf{E}_s + b\mathbf{E}_p) \times (a\mathbf{H}_s + b\mathbf{H}_p)^*] \\ &= |a|^2 \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) + |b|^2 \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^*) \end{aligned}$$

となります。すなわち、p 偏光と s 偏光のエネルギーの流れは独立して計算後に重ね合わせることができます。

[p 偏光 ( $\eta = \frac{y}{\cos \theta}$ )]

振幅反射率、及び振幅透過率は、

$$\rho_p = \frac{E'_r}{E'_i} = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} = \frac{\frac{y_0}{\cos \theta_0} - \frac{y_1}{\cos \theta_1}}{\frac{y_0}{\cos \theta_0} + \frac{y_1}{\cos \theta_1}} \quad (25)$$

$$\tau_p = \frac{E'_t}{E'_i} = \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_1} = \frac{2 \frac{y_0}{\cos \theta_0}}{\frac{y_0}{\cos \theta_0} + \frac{y_1}{\cos \theta_1}} \quad (26)$$

となります<sup>7</sup>。

次にエネルギーの流れを考えます。界面に入射するエネルギーの流れの垂直成分は、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) \times \underbrace{(\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r)^*}_{\text{界面に平行}}] \text{ の界面に垂直成分} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) \text{ の界面に平行な成分}\} \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r)^* \\
 &= \frac{1}{2} (E'_i + E'_r) y_0 \frac{1}{\cos \theta_0} (E'_i - E'_r)^* \\
 &= \frac{1}{2} \eta_0 (|E'_i|^2 - |E'_r|^2)
 \end{aligned} \tag{28}$$

となります。これを見ると、入射波のみ存在したときのエネルギーの流れの界面に垂直成分  $I_i = \frac{1}{2} \eta_0 |E'_i|^2$  と、反射波のみ存在したときのエネルギーの流れの界面に垂直成分  $I_r = \frac{1}{2} \eta_0 |E'_r|^2$  を単に足し合わせた式になっています。一方、界面から出て行くエネルギーの流れの垂直成分  $I_t$  は、

$$\begin{aligned}
 I_t &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cos \theta_1 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{E'_t}{\cos \theta_1}\right) \left(\frac{E'_t}{\cos \theta_1} y_1\right)^* \cos \theta_1 \\
 &= \frac{1}{2} \eta_1 |E'_t|^2
 \end{aligned} \tag{29}$$

となります。よってエネルギーの反射率  $R$  および透過率  $T$  は、

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left| \frac{E'_r}{E'_i} \right|^2 = |\rho_p|^2 \tag{30}$$

$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{\eta_1}{\eta_0} \left| \frac{E'_t}{E'_i} \right|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_0} |\tau_p|^2 = \frac{4\eta_1 \eta_0}{(\eta_0 + \eta_1)^2} \tag{31}$$

となります。計算するとやはり  $R + T = 1$  となっており、これは界面に入るエネルギーと、界面から出て行くエネルギーが等しいことを表します。

[s 偏光 ( $\eta = y \cos \theta$ )]

振幅反射率、及び振幅透過率は、

$$\rho_t = \frac{E'_r}{E'_i} = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} = \frac{y_0 \cos \theta_0 - y_1 \cos \theta_1}{y_0 \cos \theta_0 + y_1 \cos \theta_1} \tag{32}$$

$$\tau_t = \frac{E'_t}{E'_i} = \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_1} = \frac{2y_0 \cos \theta_0}{y_0 \cos \theta_0 + y_1 \cos \theta_1} \tag{33}$$

<sup>7</sup>振幅そのもの (界面に平行な成分を取らない) に関する反射率  $\rho_p^F$  および透過率  $\tau_p^F$  (フレネル係数) との関係は、

$$\begin{aligned}
 \rho_p^F &= \frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{E'_r}{\cos \theta_0}}{\frac{E'_i}{\cos \theta_0}} = \frac{E'_r}{E'_i} = \rho_p \\
 \tau_p^F &= \frac{E_t}{E_i} = \frac{\frac{E'_t}{\cos \theta_1}}{\frac{E'_i}{\cos \theta_0}} = \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_1} \frac{E'_t}{E'_i} = \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_1} \tau_p
 \end{aligned} \tag{27}$$

となります。

となります。<sup>8</sup>

次にエネルギーの流れを考えます。界面に入射するエネルギーの流れの垂直成分は、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\underbrace{(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)}_{\text{界面に平行}} \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r)^*] \text{ の界面に垂直成分} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) \times \{(\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r)^* \text{ の界面に平行な成分 } \}] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(E'_i + E'_r) y_0 \cos \theta_0 (E'_i - E'_r)^*] \\
 &= \frac{1}{2} \eta_0 (|E'_i|^2 - |E'_r|^2)
 \end{aligned}$$

これを見ると、やはり、入射波のみ存在したときのエネルギーの流れの界面に垂直成分  $I_i = \frac{1}{2} \eta_0 |E'_i|^2$  と、反射波のみ存在したときのエネルギーの流れの界面に垂直成分  $I_r = \frac{1}{2} \eta_0 |E'_r|^2$  を単に足し合わせた式になっています。一方、界面から出て行くエネルギーの流れの垂直成分  $I_t$  は、

$$\begin{aligned}
 I_t &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cos \theta_1 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (E'_t)(y_1 E'_t)^* \cos \theta_1 \\
 &= \frac{1}{2} \eta_1 |E'_t|^2
 \end{aligned} \tag{35}$$

となります。よって、エネルギーの反射率  $R$  および透過率  $T$  は、

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left| \frac{E'_r}{E'_i} \right|^2 = |\rho_s|^2 \tag{36}$$

$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{\eta_1}{\eta_0} \left| \frac{E'_t}{E'_i} \right|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_0} |\tau_s|^2 = \frac{4\eta_1 \eta_0}{(\eta_0 + \eta_1)^2} \tag{37}$$

と p 偏光と同様にの形になります。計算するとやはり  $R + T = 1$  となっており、これは界面に入るエネルギーと、界面から出て行くエネルギーが等しいことを表します。

### [Brewstar 角]

ここで、ある特定の周波数の光を考え、物質 0 の屈折率  $n_0 = 1.00$ 、物質 1 の屈折率  $n_1 = 1.52$  としてみます (可視光域の空気とガラスを想定)。そのときの傾斜アドミッタンス、振幅反射率、エネルギー反射率の入射角依存性を表したのが図 7 です。図 7 のグラフをまたいで縦に引っ張った破線のところで、傾斜アドミッタンス  $\eta_{0p} = \eta_{1p}$  となっており、振幅反射率  $\rho_p$  の符号が反転し、エネルギー反射率  $R_p$  は 0 になります。このときの入射角 ( $n_0 = 1.00$ 、 $n_1 = 1.52$  のときは  $56.7^\circ$ ) を Brewstar 角と言います<sup>9</sup>。

<sup>8</sup>振幅そのもの (界面に平行な成分を取らない) に関する反射率  $\rho_s^F$  および透過率  $\tau_s^F$  (フレネル係数) との関係は、

$$\begin{aligned}
 \rho_s^F &= \frac{E_r}{E_i} = \frac{E'_r}{E'_i} = \rho_s \\
 \tau_s^F &= \frac{E_t}{E_i} = \frac{E'_t}{E'_i} = \tau_s
 \end{aligned} \tag{34}$$

と全く等しくなります。電場が界面に平行なので当たり前ですが

<sup>9</sup>Brewstar 角では p 偏光の透過率が 100% になるため、ガスレーザーの共振器の窓は Brewstar 角の角度で窓がついていたりします。

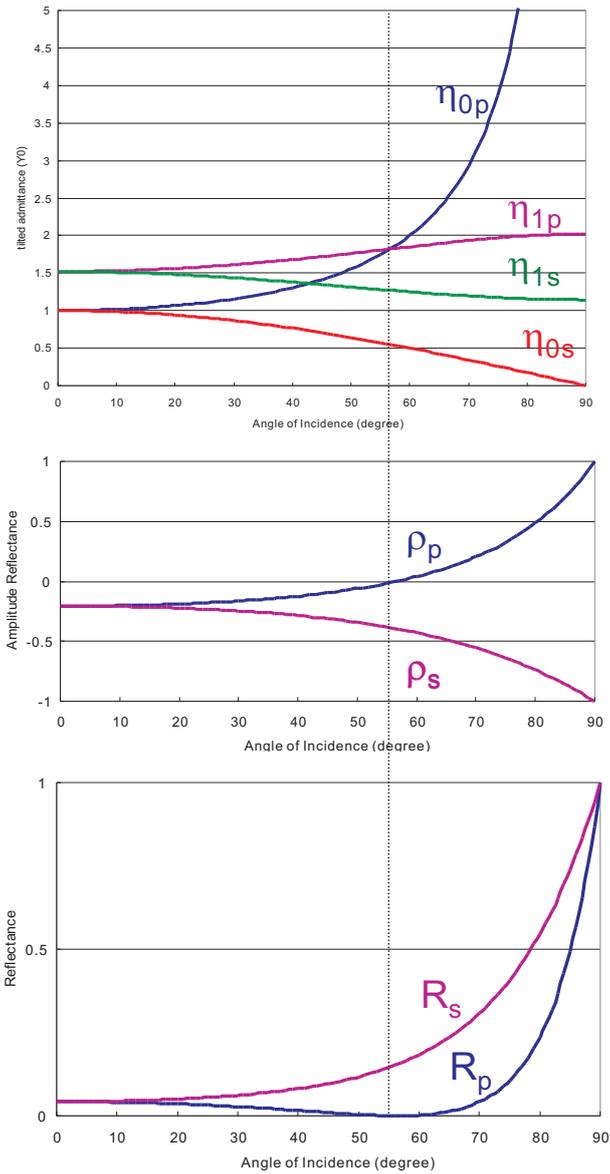


図 7: 傾斜アドミッタンス、振幅反射率、エネルギー反射率

一般の場合、屈折率  $n_0$ 、 $n_1$  の物質の界面の Brewstar 角はどうなるのか求めてみましょう。snell の法則 (式 (14)) および、Brewstar 角では  $\eta_{0p} = \eta_{1p}$  となることから、

$$\begin{aligned} \frac{n_0}{\cos \theta_0} &= \frac{n_1}{\cos \theta_1} \\ n_0 \sin \theta_0 &= n_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (38)$$

ここから頑張って  $\theta_1$  を消去して整理すると、 $\tan \theta_0 = \frac{n_1}{n_0}$  となります。すなわち、Brewstar 角  $\theta_B$  は、

$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_1}{n_0}\right) \quad (39)$$

となります。また、式 (38) のそれぞれの辺どうしを割って整理すると、

$$\sin 2\theta_0 = \sin 2\theta_1$$

となります。 $\theta_0 = \theta_1$  だとそもそも界面が無いことになってしまうので、解は  $2\theta_0 = \pi - 2\theta_1$

すなわち、

$$\theta_0 + \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad (40)$$

となります (図 8)。

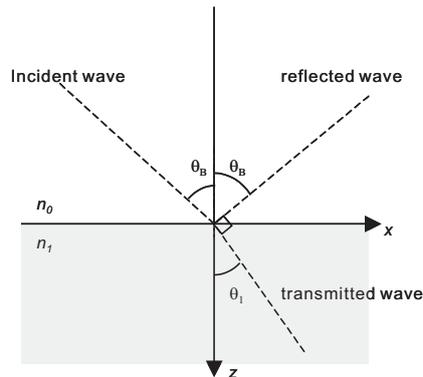


図 8: 入射角が Brewster 角に一致するときの  $\theta_0, \theta_1$  の関係

### [全反射]

屈折率が高い物質から小さい物質に光が入射するとき、反射率が 100% になるという現象があり、これを全反射と言います。以下、全反射についてみていきます<sup>10</sup>。

ここでも、ある特定の周波数の光を考え、物質 0 の屈折率  $n_0 = 1.00$ 、物質 1 の屈折率  $n_1 = 1.52$  としてみます (可視光域の空気とガラスを想定)。ただし入射方向を物質 1 から 2 に入る向きにしましょう。そのときのエネルギー反射率を表したのが図 9 です。

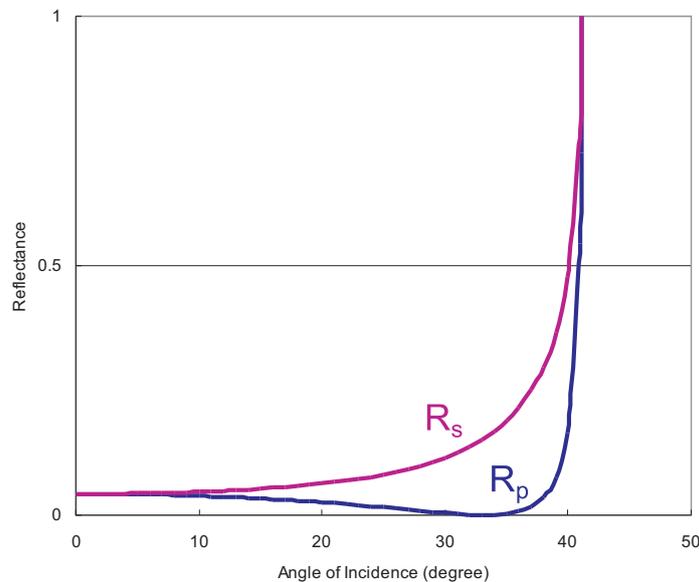


図 9: 全反射

<sup>10</sup>通常のミラーの場合、表面にゴミが付着すると拡散反射してしまい正反射率は下がります。でもたとえばガラスと空気の間全反射を利用すれば、ゴミが付着しても反射率が影響を受けにくいので、カメラなどではミラーのかわりに使われたりします。

図を見ると入射角  $\theta_1$  が  $41^\circ$  のところで反射率が急上昇し、100%に達するのが分かります。このとき屈折角  $\theta_0$  は  $90^\circ$  になっており、

$$\sin \theta_1 = \frac{n_0}{n_1}$$

となっています。  $n_0 = 1.00$ 、  $n_1 = 1.52$  のとき、  $\theta_1 = 41.1^\circ$  になります。この全反射が起きる時の入射角を臨界角といいます。

## 2.2 単一界面での反射・透過 [一般]

ここから媒質に吸収があってもよい一般の場合を考えていきます。ただし、入射媒質の吸収は無しとします。

物質 0 の複素屈折率  $N_0 = n_0$  (光学アドミッタンス  $y_0 = N_0 Y_0$  (real))、物質 1 の複素屈折率  $N_1 = n_1 - ik_1$  (光学アドミッタンス  $y_1 = N_1 Y_0$  (complex)) とし、物質 0,1 の界面に光が入射するときの反射、透過を考えましょう。各波の位相部分は、

$$\begin{aligned} \text{入射波の位相部分} &: \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi n_0}{\lambda} (x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0) \right) \right] \\ \text{反射波の位相部分} &: \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi n_0}{\lambda} (x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0) \right) \right] \\ \text{透過波の位相部分} &: \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi(n_1 - ik_1)}{\lambda} (\alpha x + \gamma z) \right) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

と書けます (透過波については厳密に位相部分だけではないですが...)。ここからまず入射角が垂直 ( $\theta_0 = 0$ ) の場合を考え、次に一般の  $\theta_0$  について考えます。

### 垂直入射

$\theta_0 = 0$  のとき、  $z = 0$  の界面において仮定③を満たすために、  $\alpha = 0$  である必要があります。ここから  $\gamma = \pm 1$  が言えますが、光の進行方向を考えて  $\gamma = 1$  になります。振幅の計算は基本的に吸収がないときと同じで、  $z = 0$  の界面において仮定③を満たすために、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r &= \mathcal{E}_t \\ \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_t &= \mathcal{H}_t \implies y_0(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r) = y_1 \mathcal{E}_t \end{aligned}$$

が成り立つ必要があります。ここから振幅反射率、および振幅透過率は、

$$\rho \equiv \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} = \frac{y_0 - y_1}{y_0 + y_1} = \frac{(n_0 - n_1) + ik_1}{(n_0 + n_1) - ik_1} \quad (42)$$

$$\tau \equiv \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} = \frac{2y_0}{y_0 + y_1} = \frac{2n_0}{n_0 + n_1 - ik_1} \quad (43)$$

と計算できます。ここから反射波の位相変化は、

$$\arg[\rho] = \tan^{-1} \left[ \frac{2k_1 n_0}{n_0^2 - n_1^2 - k_1^2} \right]$$

となり、透過波の位相変化は、

$$\arg[\tau] = \tan^{-1} \left[ \frac{k_1}{n_0 + n_1} \right]$$

となることが分かります。界面に入射するエネルギーの流れの垂直成分は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{Re} [(\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r) \cdot y_0^* (\mathcal{H}_i^* - \mathcal{H}_r^*)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [(1 + \rho) \mathcal{E}_i \cdot y_0^* (1 - \rho^*) \mathcal{E}_i^*] \\ &= \frac{1}{2} y_0 |\mathcal{E}_i|^2 \operatorname{Re} [(1 - |\rho|^2 + \rho - \rho^*)] \\ &= \frac{1}{2} y_0 |\mathcal{E}_i|^2 (1 - |\rho|^2) \end{aligned} \quad (44)$$

となる。ここで  $y_0$  が実数であるという仮定、および  $\rho - \rho^*$  が純虚数であるということを用いました。この結果は、入射波のみ存在したときのエネルギーの流れの界面に垂直成分  $I_i = \frac{1}{2} y_0 |\mathcal{E}_i|^2$  と、反射波のみ存在したときのエネルギーの流れの界面に垂直成分  $I_r = \frac{1}{2} y_0 |\mathcal{E}_r|^2 = \frac{1}{2} y_0 |\rho|^2 |\mathcal{E}_i|^2$  を単に足し合わせた式になっています。つまりこの場合でも入射波のエネルギーの流れと反射波とエネルギーの流れは独立して計算し、後から重ね合わせて良いこととなります。

一方、界面から出て行くエネルギーの流れの垂直成分  $I_t$  は

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathcal{E}_t \cdot \mathcal{H}_t^*] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\tau \mathcal{E}_i \cdot y_1^* \tau^* \mathcal{E}_i^*] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(y_1) |\tau|^2 |\mathcal{E}_i|^2 \end{aligned}$$

となります。ここからエネルギーの反射率  $R$  および透過率  $T$  は、

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left| \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \right|^2 = |\rho|^2 = \left( \frac{y_0 - y_1}{y_0 + y_1} \right) \left( \frac{y_0 - y_1}{y_0 + y_1} \right)^* \quad (45)$$

$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{\operatorname{Re}(y_1)}{y_0} \left| \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} \right|^2 = \frac{\operatorname{Re}(y_1)}{y_0} |\tau|^2 = \frac{4y_0 \operatorname{Re}(y_1)}{(y_0 + y_1)(y_0 + y_1)^*} \quad (46)$$

と導けます。これを見ると、 $T + R = 1$  となっていることが分かります。

## 斜入射

吸収がある物質に平面波が斜入射すると、“inhomogeneous” な平面波になります。“inhomogeneous” とはどういうことでしょうか。以下に見ていきましょう。図10は、ある特定の時刻において、物質0 ( $z < 0$ ) で入射波の電場の大きさの分布を、物質1 ( $z > 0$ ) で透過波の電場の大きさの分布を、色の明るさで表したものになります。物質0の屈折率  $N_0 = n_0 = 1.0$ 、物質1の屈折率  $N_1 = n_1 - ik_1 = 1.3 - i0.05$  とし、入射角  $\theta_0 = 30^\circ$ 、入射波の振幅  $\mathcal{E}_i = 1$  としました。これを見ると入射波は位相の揃った波面上で電場の大きさが等しいのに対し、透過波は位相の揃った波面上でも、 $z$  が大きくなるにつれて電場の大きさが減衰しているのが分かります。そういう意味でこの透過波を“inhomogeneous” な波と呼びます。

こういった“inhomogeneous” な波を取り扱うのも複素数を用いれば、吸収がないときと同じように計算できます。ただし今回は屈折角  $\theta_1$  が複素数になります。以下、具体的にどう計算されるかを見ていきましょう。

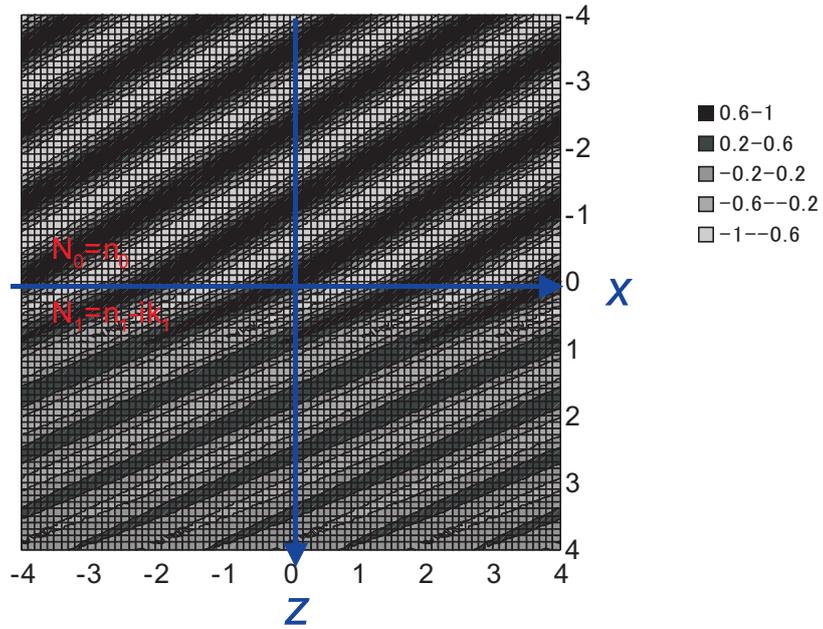


図 10: “inhomogeneous” な透過波

式 (41) から、界面  $z = 0$  において、任意の時刻  $t$ 、位置  $x$  で仮定③を満たすためには、

$$\alpha(n_1 - ik_1) = n_0 \sin \theta_0 \quad (47)$$

でなくてはなりません。  $\gamma = (1 - \alpha^2)^{1/2}$  なので、式 (41) 中にある  $(n_1 - ik_1)\gamma$  は、

$$(n_1 - ik_1)\gamma = (n_1^2 - k_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0 - i \cdot 2n_1 k_1)^{1/2}$$

となります。この式の右辺  $()^{1/2}$  の中身を見ると、複素平面上で第 3 象限か第 4 象限にあることとなります。これはつまり  $(n_1 - ik_1)\gamma$  が第 2 象限、もしくは第 4 象限にあることになるので、 $a, b$  を実数でかつ正であるとすると、 $(n_1 - ik_1)\gamma = a - ib$  もしくは  $(n_1 - ik_1)\gamma = -a + ib$  とかけます。ただし後者だと、実は透過波が  $z$  正方向に進むにつれて増幅されてしまうので不適格です。なので  $(n_1 - ik_1)\gamma = a - ib$  とかけます。これを使うと、式 (41) の透過波の位相部分は減衰をあらわす因子を含めて、

$$\exp\left(-\frac{2\pi bz}{\lambda}\right) \cdot \exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 \sin \theta_0 \cdot x + az)\right)\right]$$

と書けます。

ところで複素屈折角  $\tilde{\theta}_1$  を使うと、 $\alpha = \sin \tilde{\theta}_1$  と書いて、式 (47) は、

$$(n_1 - ik_1) \sin \tilde{\theta}_1 = n_0 \sin \theta_0 \quad (48)$$

となり Snell's law を吸収がある場合まで拡張した形になります。また、 $\gamma = \cos \tilde{\theta}_1$  となり、実は物質 1 の傾斜アドミッタンスは、

$$\begin{aligned} \text{s 偏光} : \eta_{1s} &= y_1 \cos \tilde{\theta}_1 \\ \text{p 偏光} : \eta_{1p} &= y_1 / \cos \tilde{\theta}_1 \end{aligned} \quad (49)$$

とかけて、吸収がないときと同じ形になります。このあたりの証明は難しいので省略します。s 波か p 波かどちらか選んだとき、その傾斜アドミッタンスを  $\eta_1$  とすると、反射率、透過率ら

は、以下のようになり、吸収が無いときと同じように整理されます。

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \\ \tau &= \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_1} \\ R &= \left( \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \right) \left( \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \right)^* \\ T &= \frac{4\eta_0 \operatorname{Re}(\eta_1)}{(\eta_0 + \eta_1)(\eta_0 + \eta_1)^*}\end{aligned}\tag{50}$$

なお、透過波の位相部分は、減衰する効果も盛り込んで、

$$\exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi(n_1 - ik_1)}{\lambda} (\sin \tilde{\theta}_1 \cdot x + \cos \tilde{\theta}_1 \cdot z) \right) \right]\tag{51}$$

と書けます。

### 3 計算手法 1 多重反射の重ね合わせ

この章は飛ばしてもいいかもしれませんが...。次の章の特性マトリクスの方が大事です。

#### 3.1 概要

前の章で単一の界面での反射・透過を議論しましたが、ここからは界面が複数ある系、すなわち基板に1層以上の薄膜が重なった系を考えていきます。入射平面波の波長、入射角を決めたとき、その反射・透過はどう計算されるのでしょうか。その計算手法として、多重反射の重ね合わせという手法をここで紹介します。これは各界面で反射・透過することにより、無数に考えられる光の経路の振幅反射率・透過率を全て重ね合わせるにより、トータルでの反射・透過がどうなるか計算する手法です(手計算でまともにやる気が起きるのは単層までですが...)

さて、真空中での波長  $\lambda$ (角周波数  $\omega$ ) の電場の平面波の振幅・位相部分は、薄膜の界面に平行な成分をとると

$$E'_0 \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi N}{\lambda} (x \sin \theta + z \cos \theta) \right) \right] \quad (52)$$

のように書けるのでした。ここで媒質の屈折率  $N$ 、屈折角  $\theta$  としました。(52) 式の平面波は界面にさしかかるまで無限に広がっていると考えます。

さて、多重反射を考える場合、時刻  $t$  を固定し、光の経路に従って空間的に移動しながら (52) 式のような平面波の振幅・位相がどう変わっていくか見ていくことになります。

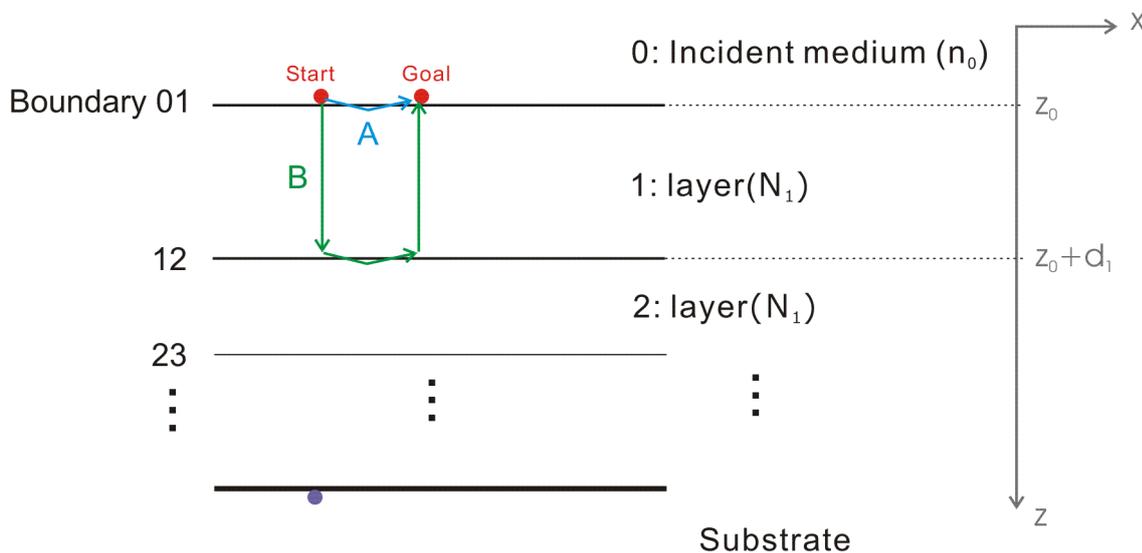


図 11: 薄膜系と2つの経路 A、B。見やすさのために始点、終点および経路が  $x$  方向にずらして描いてあるが、実際には  $z$  軸方向に一直線に揃っている場合を考える。基板との境界にある紫のまるが透過を考えるときの終点。

具体的に見ていきましょう。まず入射媒質の屈折率  $n_0$  とし、入射角  $\theta_0$  の入射波の電場を次のように置きます。

$$E'_i \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi n_0}{\lambda} (x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0) \right) \right] \quad (53)$$

次に計算の始点を置きましょう。ここでは始点を(入射媒質からみて)1層目に光が入射する直前  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$  の点に取ります(図11のStart)。ここで、一層目と入射媒質の間の界面を  $z = z_0$ 、入射光が  $+z$  方向に進行するとします<sup>11</sup>。ここから時刻を  $t = t_0$  に固定したまま、終点に至るまである経路に沿って座標を移動するにつれて光の位相・振幅がどう変わっていくかを見ることになります。ここでは簡単のため、 $(x, y)$  も  $(x_0, y_0)$  に固定し、 $z$  だけを動かしながら、振幅・位相の変化を見ていきます。そして終点は、反射を考える場合は始点と同じ点とし、透過を考える場合は(入射媒質からみて)最終層の界面(図11の紫のまる)におきます。

具体的に計算を見ていきましょう。まず時刻  $t = t_0$ 、始点  $(x_0, y_0, z_0)$  における振幅・位相をまとめて  $\tilde{E}_0$  とおくと、

$$\tilde{E}_0 = E'_i \exp \left[ i \left( \omega t_0 - \frac{2\pi n_0}{\lambda} (x_0 \sin \theta_0 + z_0 \cos \theta_0) \right) \right]$$

とおけます。また、終点を始点と同じ点にし、反射を考えます。

まず、終点まで戻ってくる経路として、界面01ですぐ反射するということが考えられます(図11の経路A)。その振幅・位相の変化を表すには  $\tilde{E}_0$  に(23)式の係数  $\rho_{01} = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1}$  をかけてあげればよく、終点での振幅・位相は  $\tilde{E}_0 \cdot \rho_{01}$  とかけます。

次に一旦界面12まで行き、そこで反射されて終点まで戻ってくる経路を考えましょう(図11の経路B)。まず界面01を透過しなければならず、そのときの振幅・位相の変化は  $\tilde{E}_0$  に(24)式の係数  $\tau_{01} = \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_1}$  をかけてあげればよく、界面01透過直後の振幅・位相は  $\tilde{E}_0 \cdot \tau_{01}$  となります。物質1中で  $+z$  方向に進む平面波の位相部分は

$$\exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi N_1}{\lambda} (x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1) \right) \right]$$

とかけるので( $\theta_1$ はSnellの法則  $n_0 \sin \theta_0 = N_1 \sin \theta_1$  で決まります)、物質1(膜厚  $d_1$ )を  $z$  方向に  $z_0 \rightarrow z_0 + d_1$  まで横切るとき、振幅・位相の変化は  $\exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda} N_1 d_1 \cos \theta_1 \right]$  をかけてあげればよいことが分かります。なので界面12で反射される直前で位相・振幅は  $\tilde{E}_0 \cdot \tau_{01} \cdot e^{-i\Delta_1}$  となります( $\Delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} N_1 d_1 \cos \theta_1$ )。界面12での反射は  $\rho_{12} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$  をかけてあげれば表せるので、界面12での反射直後の振幅・位相は  $\tilde{E}_0 \cdot \tau_{01} \cdot e^{-i\Delta_1} \cdot \rho_{12}$  となります。次に、物質1を  $-z$  方向に横切って界面01まで戻る経路を考えるのですが、物質1中で  $-z$  方向に進む平面波の位相部分は

$$\exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi N_1}{\lambda} (x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1) \right) \right]$$

とかけるので、物質1(膜厚  $d_1$ )を  $z$  方向に  $z_0 + d_1 \rightarrow z_0$  まで横切るとき、振幅・位相の変化はやはり  $e^{-i\Delta_1}$  をかけてあげれば表せます。したがって、界面01まで再びもどってきたとき、振幅・位相は  $\tilde{E}_0 \cdot \tau_{01} \cdot e^{-i\Delta_1} \cdot \rho_{12} \cdot e^{-i\Delta_1}$  とかけます。最後に終点に至るには、界面01を透過しなければならず、このときの変化は  $\tau_{10} = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_0}$  をかけてあげれば良いので、この経路での終点での振幅・位相は  $\tilde{E}_0 \cdot \tau_{01} \cdot e^{-i\Delta_1} \cdot \rho_{12} \cdot e^{-i\Delta_1} \cdot \tau_{10}$  となります。

これ以外にも終点に至る経路は無数にあり、すべての経路は  $\tilde{E}_0$  に係数をかけていくことで表すことができます。ここで全体の振幅反射率  $\rho$  とすると、終点での振幅・位相は  $\tilde{E}_0 \cdot \rho$  であり、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 \cdot \rho &= (\text{終点の位相・振幅の全ての経路について和}) \\ &= \tilde{E}_0 \cdot (\text{全ての経路を表す係数の和}) \end{aligned}$$

$$\implies \rho = (\text{全ての経路を表す係数の和})$$

<sup>11</sup> 起点の  $z$  座標は  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} z_0 - \epsilon$  とかいた方が良いでしょう

とかけます。振幅透過率を得たい場合は、主点を最終層の最後の界面において同様に考えます。ここである経路に沿った振幅・位相の変化を表す係数を、「界面を反射・透過するとき」および「各層を通過するとき」に分けてまとめてみます。

### 各界面を反射・透過するときの係数

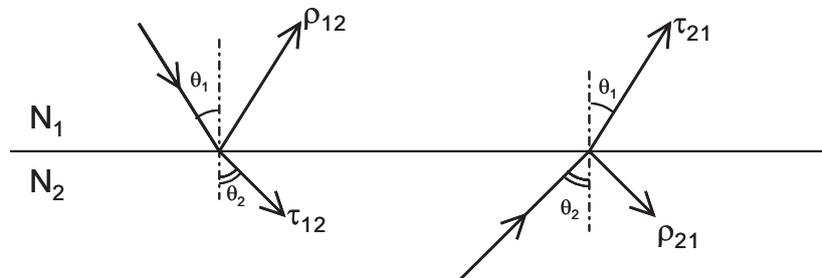


図 12: 界面で透過・反射するときの係数

物質 1(複素屈折率  $N_1$ )、物質 2(複素屈折率  $N_2$ ) の界面を考えましょう(図 12、図は見やすさのため  $x$  方向にも移動しているように描いていますが、実際に考える経路は  $z$  方向にしか動きません。)。ここからは、一般に入射角および屈折角 ( $\theta_1, \theta_2$ ) はすべて複素数になります<sup>12</sup>。これまでと同じように、s 偏光と p 偏光に分けて考えます。それぞれの偏光での傾斜アドミッタンスを物質 1 で  $\eta_1$ 、物質 2 で  $\eta_2$  とします (s 偏光で  $\eta_1 = N_1 Y_0 \cos \theta_1$ ,  $\eta_2 = N_2 Y_0 \cos \theta_2$ 、p 偏光で  $\eta_1 = N_1 Y_0 / \cos \theta_1$ ,  $\eta_2 = N_2 Y_0 / \cos \theta_2$  になります)。すると各反射・透過の係数は以下のようになります。

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} & \rho_{21} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\rho_{12} \\ \tau_{12} &= \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} & \tau_{21} &= \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \end{aligned} \quad (54)$$

### 各層を通過するときの取り扱い

界面ではなく、たとえば厚さ  $d$  の物質の膜を端から端まで平面波が通過するとき、それはどう扱えば良いのでしょうか。そのために物質中で位置座標を変えたときどう位相部分が変化するかを見ていきます。屈折率  $N_1$  の薄膜中を角度  $\theta_1$  (一般に複素数) で進む平面波の位相部分は

$$\exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi N_1}{\lambda} (\sin \theta_1 \cdot x \pm \cos \theta_1 \cdot z) \right) \right] \quad (55)$$

と書くことができます。上式中の  $\pm$  は、 $+z$  方向に進むとき  $+$ 、 $-z$  方向に進むとき  $-$  をとります。厚さ  $d$  の薄膜を通過するのですから、このとき  $z$  座標の変化は  $\pm d$  となり、 $z$  軸方向の移動による変化が  $-\frac{2\pi N_1}{\lambda} d \cos \theta_1$  生じます。<sup>13</sup>

<sup>12</sup>前章までは入射媒質に吸収がない場合しか考えて来ませんでした。これは入射媒質に吸収があると、エネルギー反射率などの計算が非常にややこしくなるためにそうしてきました。実はある界面での振幅・透過の係数だけ考える場合、入射側の媒質に吸収があっても、アドミッタンスが複素数になるだけで、係数は全く同じ形であらわすことが出来ます。また Snell の法則の拡張版  $N_1 \sin \theta_1 = N_2 \sin \theta_2$  も成り立ちます。

<sup>13</sup>一方で、もし  $x$  軸方向の移動を由来とする位相変化を考える場合どう考えれば良いのでしょうか。これは実

### 3.2 コヒーレンス長

ここでひとつ重要なことを補足しておきます。先ほど時刻を固定して、光の経路に従って位相・振幅がどう移り変わっていくかを見る、と言いました。これは考える波が理想的な平面波のように無限にきれいな波の形を保っていると考えれば問題ないのですが、現実の光はそうではありません。現実の光は、位相の秩序を保ったきれいな波を保つ距離（コヒーレンス長）に限りがあり<sup>14</sup>、そのスケールを超えると上で述べたルールに従って各経路間の位相の関係が記述できなくなります。そのかわり経路間の位相関係は無秩序になり、現実には観測できるものはあらゆる位相関係の平均を取ったものになります。なのでコヒーレンス長を超えるスケールでは光の干渉は起きません。

### 3.3 具体例：単層膜の反射・透過

具体例として、垂直入射でかつ基板・薄膜ともに吸収のない場合を考えます。例えば、屈折率  $n_2$  の基板に厚さ  $d$  の薄膜  $n_1$  が形成され、屈折率  $n_0$  の入射媒質から光が入射する場合を考えましょう（図 13）。図は見やすさのために斜入射であるかのように描いてありますが、まずは垂直入射から考えていきます。

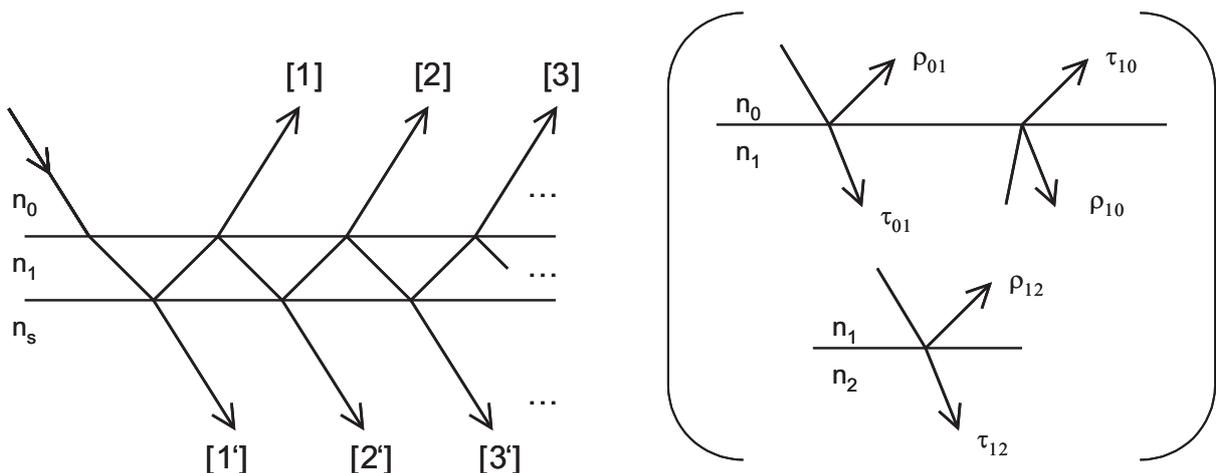


図 13: 単層膜における多重反射。

は考慮する必要がありません。それは Snell の法則が成り立つためです。つまり、多重反射により生じる、光のさまざまな経路を考えた後、最終的にそれを足し合わせることになるので、もし全ての経路に共通する位相変化があり、それが減衰することを表さない純粋な位相変化であった場合、考慮する必要がなくなります（エネルギー反射・透過率を考えるとときに消えます）。Snell の法則が成り立つため、系を構成する全ての物質 1,2,3... について、

$$N_0 \sin \theta_0 = N_1 \sin \theta_1 = N_2 \sin \theta_2 = \dots$$

が成り立ちます。ここで一番上の入射媒質 0 の吸収が無いとすれば、 $\theta_0$  および  $N_0 = n_0$  は実数なので  $N_0 \sin \theta_0 = N_1 \sin \theta_1 = N_2 \sin \theta_2 = \dots$  も全て実数になります。つまり  $x$  方向の移動由来の位相の変化は、減衰のない純粋な位相変化になります。さまざまな経路を考え足し合わせるときは、最終的に同じ座標  $(x, y, z)$  で足し合わせを考えなければいけません。つまり、それぞれの経路でトータルでの  $x$  軸方向の変化は、どの経路でも共通となるはずで、すると Snell の法則により、 $x$  軸方向の移動に由来する位相変化は全ての経路で共通になります。よって  $x$  軸方向の移動を由来とする位相変化は考慮する必要がありません。

<sup>14</sup> コヒーレンス長は光源に依存します。太陽光の場合は数  $\mu\text{m}$  程度ですが、レーザーの場合は数  $\text{km}$  に及ぶこともあります。

まず、各界面での振幅反射率・透過率は以下のようになります。

$$\begin{aligned}\rho_{01} &= \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} & \tau_{01} &= \frac{2n_0}{n_0 + n_1} \\ \rho_{10} &= \frac{n_1 - n_0}{n_0 + n_1} = -\rho_{01} & \tau_{10} &= \frac{2n_1}{n_0 + n_1} \\ \rho_{12} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} & \tau_{12} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2}\end{aligned}$$

また、薄膜中を1回通過するときの位相変化は  $-\delta = -\frac{2\pi}{\lambda}n_1d$  となります。

これらを利用すると、全体の振幅反射率は、それぞれの反射成分を足し合わせれば良く、

$$\begin{aligned}\rho &= [1] + [2] + [3] + \dots \\ &= \rho_{01} + \tau_{01}e^{-i\delta}\rho_{12}e^{-i\delta}\tau_{10} + \tau_{01}(e^{-i\delta}\rho_{12}e^{-i\delta})\rho_{10}(e^{-i\delta}\rho_{12}e^{-i\delta})\tau_{10} + \dots \\ &= \rho_{01} + \tau_{01}\tau_{10}\rho_{12}e^{-2i\delta} \left[ 1 + \rho_{10}\rho_{12}e^{-2i\delta} + (\rho_{10}\rho_{12}e^{-2i\delta})^2 + \dots \right] \\ &= \rho_{01} + \tau_{01}\tau_{10}\rho_{12}e^{-2i\delta} \frac{1}{1 - \rho_{10}\rho_{12}e^{-2i\delta}} \\ &= \rho_{01} + \tau_{01}\tau_{10}\rho_{12}e^{-2i\delta} \frac{1}{1 + \rho_{01}\rho_{12}e^{-2i\delta}} \\ &= \frac{\rho_{01} + (\rho_{01}^2 + \tau_{01}\tau_{10})\rho_{12}e^{-2i\delta}}{1 + \rho_{01}\rho_{12}e^{-2i\delta}} \\ &= \frac{\rho_{01} + \rho_{12}e^{-2i\delta}}{1 + \rho_{01}\rho_{12}e^{-2i\delta}}\end{aligned}\tag{56}$$

と求めることができます。ここで、計算すると  $\rho_{01}^2 + \tau_{01}\tau_{10} = 1$  となることを用いました。同様に全体の振幅透過率は、

$$\begin{aligned}\tau &= [1'] + [2'] + [3'] + \dots \\ &= \tau_{01}e^{-i\delta}\tau_{12} + \tau_{01}e^{-i\delta}(\rho_{12}e^{-i\delta}\rho_{10}e^{-i\delta})\tau_{12} + \tau_{01}e^{-i\delta}(\rho_{12}e^{-i\delta}\rho_{10}e^{-i\delta})^2\tau_{12} + \dots \\ &= \tau_{01}\tau_{12}e^{-i\delta} \left[ 1 + \rho_{12}\rho_{10}e^{-2i\delta} + (\rho_{12}\rho_{10}e^{-2i\delta})^2 + \dots \right] \\ &= \frac{\tau_{01}\tau_{12}e^{-i\delta}}{1 - \rho_{12}\rho_{10}e^{-2i\delta}} \\ &= \frac{\tau_{01}\tau_{12}e^{-i\delta}}{1 + \rho_{12}\rho_{01}e^{-2i\delta}}\end{aligned}\tag{57}$$

と計算できます。

次にエネルギーの反射率・透過率を求めましょう。入射媒質に吸収が無い場合、単一界面のときと同様に入射波、反射波、透過波はそれぞれ独立にエネルギーを計算できます ((44) 式参照)。従って、エネルギー反射率および透過率は、

$$\begin{aligned}R &= |\rho|^2 \\ T &= \frac{n_2}{n_0} |\tau|^2\end{aligned}$$

で計算できます。エネルギー反射率  $R$  を屈折率および膜厚だけで表す (つまり  $n$  たちおよび  $\delta$  で表す) ために、頑張って計算すると、

$$R = \frac{n_1^2(n_0 - n_2)^2 - (n_0^2 - n_1^2)(n_1^2 - n_2^2)\sin^2\delta}{n_1^2(n_0 + n_2)^2 - (n_0^2 - n_1^2)(n_1^2 - n_2^2)\sin^2\delta}\tag{58}$$

となります。これを見ると  $\sin^2 \delta$  の関数になってますから、 $\sin^2 \delta$  が極値をとるとき  $R$  も極値を取るはずで、 $\sin^2 \delta$  が極値をとるのは、 $m$  を整数として、(i)  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d = m\pi$ 、つまり  $n_1 d = \frac{\lambda}{2} m$  のとき、および (ii)  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d = m\pi$ 、つまり  $n_1 d = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} m$  のときです。(i) のとき、エネルギー反射率は

$$R = \left( \frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2 \quad (59)$$

となり、薄膜が無い場合の反射率  $R' = \left( \frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2$  と全く同じになります。(ii) のとき、計算すると、

$$R = R' - \frac{4n_0 n_2 (n_1^2 - n_0^2)(n_2^2 - n_1^2)}{(n_0 + n_2)^2 (n_1^2 + n_0 n_2)^2} \quad (60)$$

となります。ここで入射媒質として空気を取ると、 $n_1 > n_0 = 1$  なので、上式右辺の第2項の符号は  $n_1, n_2$  の大小関係に委ねられます。従って  $n_1 > n_2$  のとき  $R > R'$ 、 $n_1 < n_2$  のとき  $R < R'$  となります。

具体的に単層膜のエネルギー反射率を計算した結果を図14に載せます。入射媒質は空気(グラフの全波長域で  $n_0 = 1$ )、基板としてBK-7というガラス( $\lambda = 550\text{nm}$  で  $n_2 = 1.52$ )を想定しました。薄膜は厚さ  $d = 800\text{nm}$  とし、低屈折率材料である  $\text{SiO}_2$  ( $\lambda = 550\text{nm}$  で  $n_1 = 1.46$ ) の場合と、高屈折率材料である ( $\lambda = 550\text{nm}$  で  $n_1 = 2.34$ ) の2種類を考えました。屈折率の分散(波長依存性)はWebサイト (<http://www.filmetricsinc.jp/refractive-index-database>) から取ってきました。グラフを見ると、薄膜があるとき反射率が波をうった形をしています。これは光の干渉が起きていることを表します。高屈折率膜・低屈折率膜どちらの場合も、基板と同じ反射率になっている部分はいくつかあり、実はそこでは (i)  $n_1 d = \frac{\lambda}{2} m$  となっています。また低屈折率膜では極小、高屈折率膜では極大になっている部分は (ii)  $n_1 d = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} m$  となっています。

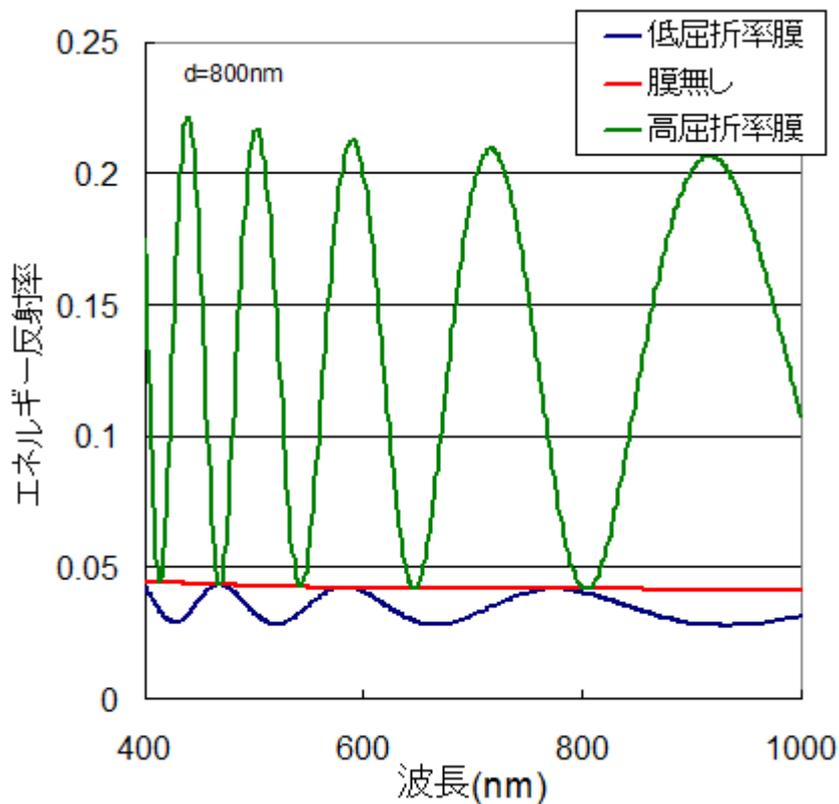


図 14: 単層膜の反射率

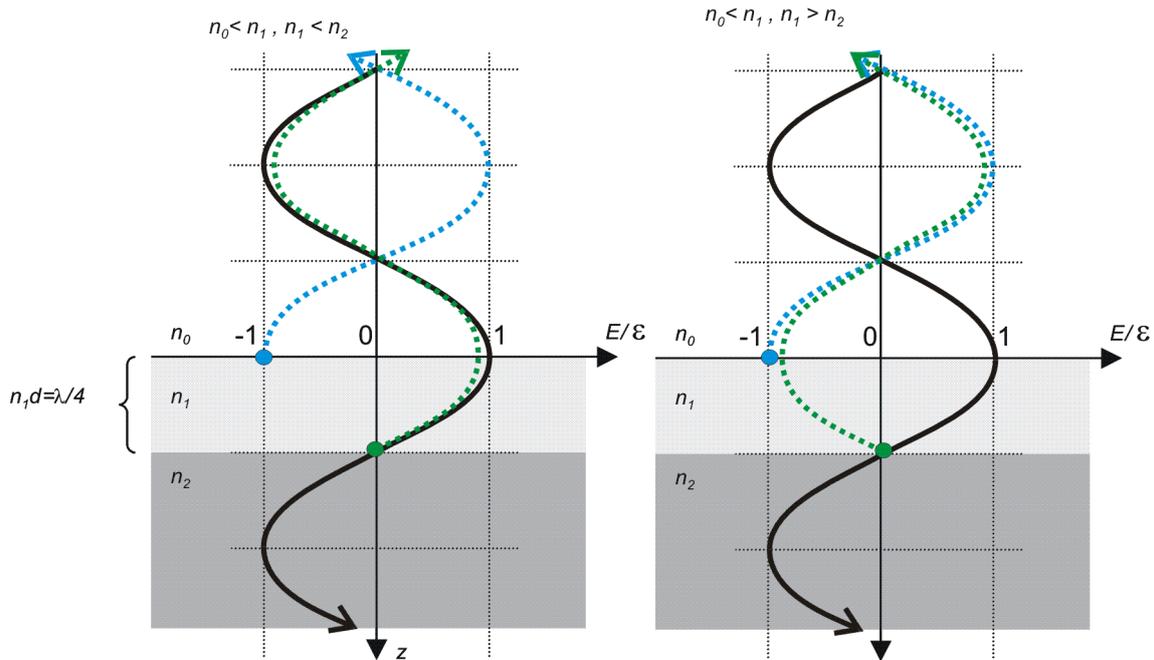


図 15: 単層膜での光の干渉の様子

なお、斜入射および吸収がある場合への応用は、形式的には簡単です。各物質の(複素)屈折率と入射角  $\theta_0$  を決めてあげれば、Snell の法則から  $\theta_1, \theta_2$  が決まります。さらに p 偏光か s 偏光が定めれば各物質での傾斜アドミッタンスが求まり、吸収が無い場合の垂直入射の式の屈折率を傾斜アドミッタンスで置き換えます。さらに、 $\delta \rightarrow \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} N_1 d \cdot \cos \theta_1$  と置き換えて同様の計算すればよいのです。

さて、最後に光の干渉が起きている様子を図で考えてみましょう。簡単のため再び話を吸収のない垂直入射のときにもどします。図 15 は  $n_1 d = \lambda/4$  のときの波の様子です。実際には多重反射ですが、簡単のため各界面で 1 回反射した波を点線で表しました。 $n_1 < n_2$  のとき反射した波どうしは弱め合い、 $n_1 > n_2$  のときは強め合っているのが分かると思います。これは先ほど (ii)  $n_1 d = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} m$  のとき反射が、低屈折率膜では極小に、高屈折率膜では極大になっていたことに対応します。

### 3.4 非対称透過膜はあるか？

さてここで「非対称透過膜はあるか？」という問いについて考えてみましょう。まず非対称透過膜を定義しましょう。ある薄膜系を考えます。一方の側(表とします)から光を入射させ、裏側に光を透過させたときのエネルギー透過率  $T$  とします。次に薄膜系の裏側から、光を先ほどの透過光と正反対の向きに入射させ<sup>15</sup>、表側に光を透過させたときのエネルギー透過率  $T'$  とします。その結果  $T \neq T'$  となる場合、この薄膜系を「非対称透過膜」と呼ぶことにしましょう。非対称透過膜があれば第 2 種永久機関ができそうですね。

しかし実は非対称透過膜は存在しないのです。このことを、ここでは多重反射の計算手法を利用して証明したいと思います。

例として図 16 のような薄膜系を考えたいと思います(媒質 0,3 は吸収無し、従ってアドミッタンスは実数と仮定)。この薄膜系に限定した証明になってしまいますが、一般の場合への拡張

<sup>15</sup>したがって、図 16 の場合、媒質 0 側から入射したときの 3 の屈折角が、3 側から入射するときの入射角と考える必要があります。

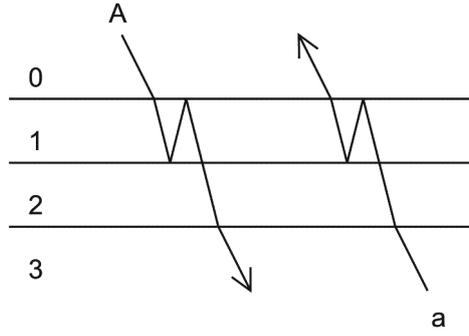


図 16: 薄膜系 0123 を正反対に進む経路 (見やすさのため界面たちに平行方向にも経路を動かして描いているが、計算では界面立ちに垂直方向にのみ動く経路を考える。)

は容易のはずです。

両側から光が正反対の方向に入射する場合、多重反射によって得られる経路にも必ず正反対方向に進む組が考えられます。例えば図 16 の 2 組 (A, a) の経路が対応します。この 2 つの経路での振幅・位相の変化は、

$$\begin{aligned} \text{A: } & \tau_{01}e^{-i\Delta_1}\rho_{12}e^{-i\Delta_1}\rho_{10}e^{-i\Delta_1}\tau_{12}e^{-i\Delta_2}\tau_{23} = \tau_{01}\tau_{12}\tau_{23}(\rho_{12}\rho_{10}e^{-i(3\Delta_1+\Delta_2)}) \\ \text{a: } & \tau_{32}e^{-i\Delta_2}\tau_{21}e^{-i\Delta_1}\rho_{10}e^{-i\Delta_1}\rho_{12}e^{-i\Delta_1}\tau_{10} = \tau_{32}\tau_{21}\tau_{10}(\rho_{12}\rho_{10}e^{-i(3\Delta_1+\Delta_2)}) \end{aligned}$$

で表されます。

ここで、 $0 \rightarrow 3$  の方向に透過する場合、どの経路を表す成分も必ず  $\tau_{01}\tau_{12}\tau_{23}$  が 1 つは含まれます。それ以外、境界を透過することによる振幅の変化はかならず  $\tau_{21}\tau_{12}$  のセットで現れるはず (2 から 1 の層に戻ったら、必ずもう一度 2 の方に透過しなければ透過光にならない)。一方で  $0 \rightarrow 3$  の方向に透過する場合、どの経路を表す成分も必ず  $\tau_{32}\tau_{21}\tau_{10}$  が 1 つは含まれ、界面を透過することによる振幅の変化はかならず  $\tau_{12}\tau_{21}$  のセットで現れます。当然、 $\tau_{21}\tau_{12} = \tau_{12}\tau_{21}$  で、反射および層を通過することによる振幅 ( $\rho, e^{-i\Delta}$ ) の変化は対応する経路で共通です (経路 A と a を見れば明白)。従って、 $0 \rightarrow 3$  方向での振幅透過率  $\tau$ 、 $3 \rightarrow 0$  方向での振幅透過率  $\tau'$  とすると

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_{01}\tau_{12}\tau_{23} \times [\tau, \tau' \text{ とで共通の部分}] \\ \tau' &= \tau_{32}\tau_{21}\tau_{10} \times [\tau, \tau' \text{ とで共通の部分}] \end{aligned}$$

と書けるはず。従って、

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_{01}\tau_{12}\tau_{23} \times [\tau, \tau' \text{ とで共通の部分}] \\ &= \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_1} \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_3} \times [\tau, \tau' \text{ とで共通の部分}] \\ &= \frac{2\eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \frac{2\eta_3}{\eta_2 + \eta_3} \times \frac{\eta_0}{\eta_3} \times [\tau, \tau' \text{ とで共通の部分}] \\ &= \tau_{32}\tau_{21}\tau_{10} \cdot \frac{\eta_0}{\eta_3} \times [\tau, \tau' \text{ とで共通の部分}] \\ &= \tau' \cdot \frac{\eta_0}{\eta_3} \end{aligned}$$

とかけます。従って、 $0 \rightarrow 3$  方向でのエネルギー透過率  $T$ 、 $3 \rightarrow 0$  方向でのエネルギー透過率  $T'$

とすると、

$$\begin{aligned} T &= \frac{\eta_3}{\eta_0} |\tau|^2 \\ &= \frac{\eta_3}{\eta_0} \left( \frac{\eta_0}{\eta_3} \right)^2 |\tau'|^2 \\ &= \frac{\eta_0}{\eta_3} |\tau'|^2 \\ &= T' \end{aligned} \tag{61}$$

となり、エネルギー透過率が  $0 \rightarrow 3$  方向と  $3 \rightarrow 0$  方向で等しくなります。つまり非対称透過膜は存在しないこととなります。

## 4 計算手法2 特性マトリクス

ここから光学薄膜の理論を語る上で、最も重要とも言える特性マトリクスの話に入ります。ここからは電場、磁場とも全て界面に平行な成分 ( $E'$ ,  $H'$ ) のみ考えます。いちいち「'」記号をつけるのも鬱陶しいので、ここからは「'」を省き、電場や磁場を  $E$  や  $H$  のように書いてただけでも界面に平行な成分を表すことにします。

### 4.1 特性マトリクスとは

特性マトリクスを導入すると、多層膜における計算が形式的には非常に簡単に書けることとなります。それを以下で見ていきます。

これまでと同様、まず入射波の設定 (入射角、真空中での波長、p 偏光か s 偏光か)。すると各層の傾斜アドミッタンスが決まるはずですが、

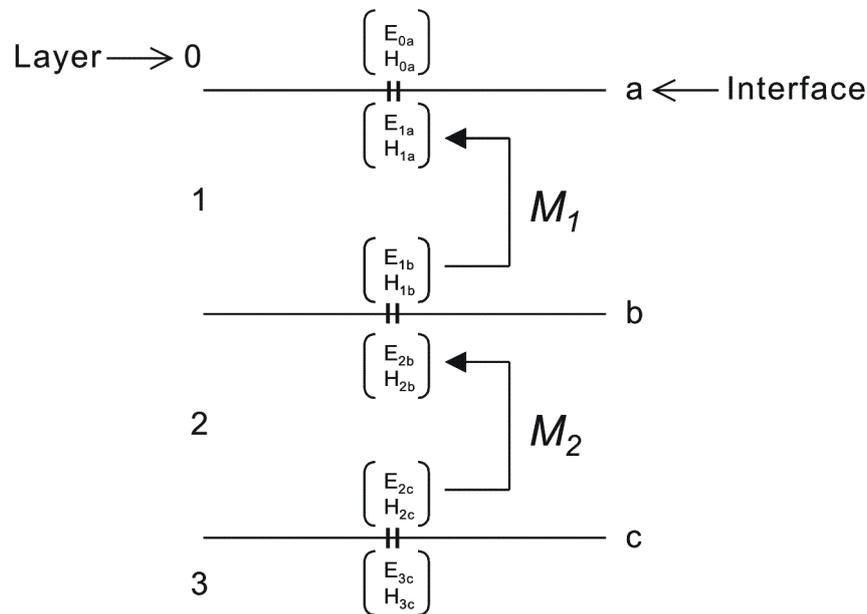


図 17: 各界面の電磁場が特性マトリクスにより関係付けられる模式図

ここから図 17 を見て考えていきましょう。まずある層 1 に注目し、その両界面  $a$ ,  $b$  において、電磁場の振幅をベクトル表記で  $\begin{pmatrix} E_{1a} \\ H_{1a} \end{pmatrix}$  および  $\begin{pmatrix} E_{1b} \\ H_{1b} \end{pmatrix}$  と書きます。もし、この 2 つのベクトルの間に関係式

$$\begin{pmatrix} E_{1a} \\ H_{1a} \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} E_{1b} \\ H_{1b} \end{pmatrix}$$

が成立し、行列  $M_1$  のすべての成分が層 1 の傾斜アドミッタンス  $\eta_1$  と厚さ  $d_1$  およびその層における屈折角  $\theta_1$  だけで書けたとしたらどうでしょう。そしてこのような関係式が一般に全ての層で成り立ったとしたらどうでしょう。仮定③より界面において電磁場は連続なので、多層系

で次の関係式が成り立つこととなります。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} E_{0a} \\ H_{0a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{1a} \\ H_{1a} \end{pmatrix} \\
 &= M_1 \begin{pmatrix} E_{1b} \\ H_{1b} \end{pmatrix} \\
 &= M_1 \begin{pmatrix} E_{2b} \\ H_{2b} \end{pmatrix} \\
 &= M_1 \cdot M_2 \begin{pmatrix} E_{2c} \\ H_{2c} \end{pmatrix} \\
 &= M_1 \cdot M_2 \begin{pmatrix} E_{3c} \\ H_{3c} \end{pmatrix} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

層 1,2 の両端の界面における電磁場の振幅が、行列  $M_1 \cdot M_2$  で関係づけられたこととなります。

一般に多層系 (単層でも良い) の両端の界面での電磁場の振幅の関係をあらわす行列を特性マトリクスといい、多層系の特性マトリクス  $M$  は構成する層 1, 2, ... の特性マトリクス  $M_1, M_2, \dots$  を用いて、 $M = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots$  と書けます。

## 4.2 特性マトリクスの導出

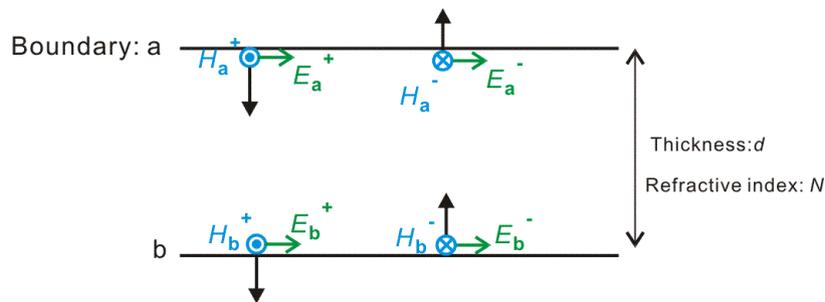


図 18: 薄膜両端の界面における電磁場の振幅の様子

屈折率  $N$  (アドミッタンス  $y = NY_0$ )、膜厚  $d$  の層について考えます。層の両端の界面を  $a, b$  としましょう (図 18)。そして入射波を設定します (入射角、真空中での波長  $\lambda$ 、p 偏光か s 偏光か)。するとこの層における傾斜アドミッタンスは s 偏光で  $\eta = y \cos \theta$ 、p 偏光で  $\eta = y / \cos \theta$  になります ( $\theta$  はこの層における屈折角)。ここまでで設定は終わりました。界面  $a$  における電場および磁場の振幅の界面に平行な成分を  $E_a, H_a$  のように書き、さらにその進行方向に応じた成分を  $E_a^+, E_a^-$  のように表記します。ここで膜厚  $d$  だけ移動すると、位相が  $-\delta = -\frac{2\pi}{\lambda}Nd \cos \theta$  だけかわることから、 $E_a^+ \cdot e^{-i\delta} = E_b^+, E_b^- \cdot e^{-i\delta} = E_a^-$  というふうには書けるはず。従って、

$$\begin{cases} E_a = E_a^+ + E_a^- = E_b^+ \cdot e^{i\delta} + E_b^- \cdot e^{-i\delta} \\ H_a = H_a^+ - H_a^- = \eta(E_b^+ \cdot e^{i\delta} - E_b^- \cdot e^{-i\delta}) \end{cases} \quad (62)$$

となります。一方で、

$$\begin{cases} E_b &= E_b^+ + E_b^- \\ H_b &= H_b^+ - H_b^- = \eta(E_b^+ - E_b^-) \end{cases} \quad (63)$$

なので、 $E_b^+ = \frac{\eta E_b + H_b}{2\eta}$ 、 $E_b^- = \frac{\eta E_b - H_b}{2\eta}$  となり、これを (62) 式に入れると、

$$\begin{cases} E_a &= \frac{\eta E_b + H_b}{2\eta} \cdot e^{i\delta} + \frac{\eta E_b - H_b}{2\eta} \cdot e^{-i\delta} = \cos \delta \cdot E_b + i \frac{\sin \delta}{\eta} \cdot H_b \\ H_a &= \frac{\eta E_b + H_b}{2} \cdot e^{i\delta} - \frac{\eta E_b - H_b}{2} \cdot e^{-i\delta} = i\eta \sin \delta \cdot E_b + \cos \delta \cdot H_b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_a \\ H_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & i \frac{\sin \delta}{\eta} \\ i\eta \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_b \\ H_b \end{pmatrix} \quad (64)$$

となります。この  $\begin{pmatrix} \cos \delta & i \frac{\sin \delta}{\eta} \\ i\eta \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$  がこの層の特性マトリクスになります。確かに全ての成分が傾斜アドミッタンス  $\eta$  と厚さ  $d$  およびその層における屈折角  $\theta$  だけで書けています。

### 4.3 単層膜への応用

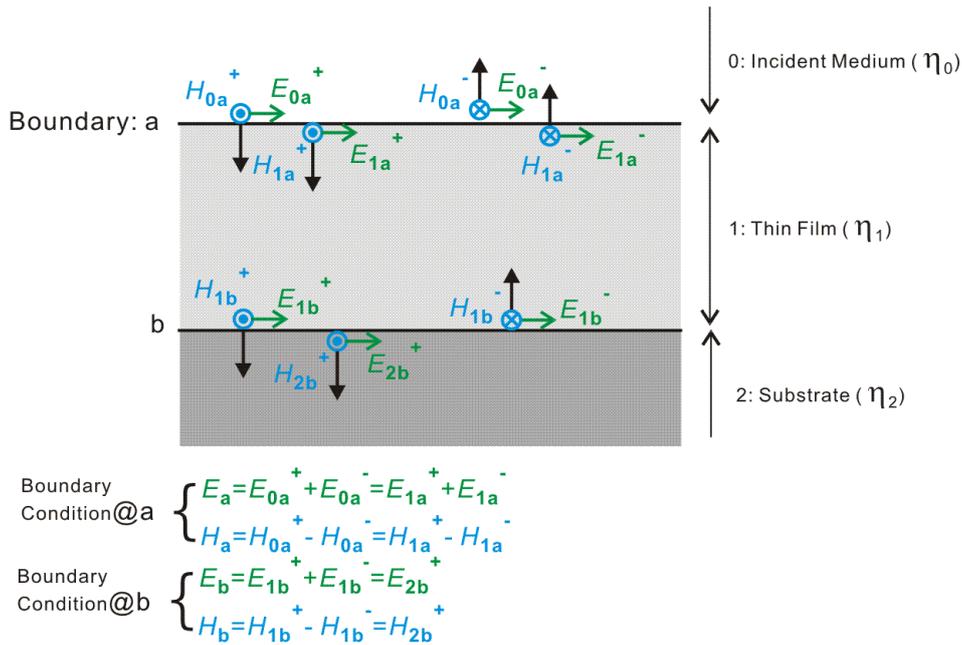


図 19: 単層膜における境界の電磁場の振幅の様子

基板 2 に膜厚  $d$ 、屈折率  $N_1$  の薄膜 1 が積層され、入射媒質 1 から光が入射する場合を考えます。各部分の傾斜アドミッタンス、および各界面における電磁場の振幅を媒質と進行方向も合わせて図 19 のように書きましょう。界面  $a$  での電場・磁場の振幅について以下の式が成り立ちます。

$$\begin{cases} E_a &= E_{0a}^+ + E_{0a}^- \\ H_a &= H_{0a}^+ - H_{0a}^- = \eta_0(E_{0a}^+ - E_{0a}^-) \end{cases} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{0a}^+ &= \frac{\eta_0 E_a + H_a}{2\eta_0} \\ E_{0a}^- &= \frac{\eta_0 E_a - H_a}{2\eta_0} \end{aligned} \quad (66)$$

従って、振幅反射率  $\rho$  は、

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E_{0a}^-}{E_{0a}^+} = \frac{\eta_0 E_a - H_a}{\eta_0 E_a + H_a} = \frac{\eta_0 - \frac{H_a}{E_a}}{\eta_0 + \frac{H_a}{E_a}} \\ &= \frac{\eta_0 - \eta_E}{\eta_0 + \eta_E} \end{aligned} \quad (67)$$

と書けます。ここで  $\eta_E \equiv \frac{H_a}{E_a}$  と置きました。これを (23) と見比べると、振幅反射率は、アドミッタンス  $\eta_E$  の物質の単一の界面の反射に等価ということになります。このことから  $\eta_E$  を等価アドミッタンスと呼びます。ここで注意しておきたいのが、振幅透過率に関してはアドミッタンス  $\eta_E$  の物質の単一の界面の透過とは等価でないということです。具体的に見ていくと、

$$\tau = \frac{E_{2b}^+}{E_{0a}^+} = \frac{E_b}{E_{0a}^+} = \frac{2\eta_0 \cdot E_b}{\eta_0 E_a + H_a} = \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_E} \cdot \frac{E_b}{E_a} \quad (68)$$

となり、(24) 式とは異なります。

さて、等価アドミッタンスを特性マトリクスを使って求めてみましょう。界面  $a$  と界面  $b$  の電磁場の振幅は、特性マトリクスを使って

$$\begin{pmatrix} E_a \\ H_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & i \frac{\sin \delta}{\eta_1} \\ i \eta_1 \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_b \\ H_b \end{pmatrix}$$

と書けます ( $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} N_1 d \cos \theta_1$ )。さらに各成分を  $E_b$  で割ってやると、

$$\begin{pmatrix} E_a/E_b \\ H_a/E_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & i \frac{\sin \delta}{\eta_1} \\ i \eta_1 \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ H_b/E_b \end{pmatrix}$$

となります。界面  $b$  の基板 2 側では + 方向の進行波しかないはずなので、 $E_b = E_{2b}^+$ 、 $H_b = H_{2b}^+ = \eta_2 E_{2b}^+$  なので、 $H_b/E_b = \eta_2$  になります。また、

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_a/E_b \\ H_a/E_b \end{pmatrix}$$

としてベクトル  $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$  を導入する<sup>16</sup>と、

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_a/E_b \\ H_a/E_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & i \frac{\sin \delta}{\eta_1} \\ i \eta_1 \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (69)$$

となり、 $B$  と  $C$  とともに、 $\delta$  (すなわち膜厚  $d$ 、屈折率  $N_1$ 、屈折角  $\theta$ )、 $\eta_1$ 、 $\eta_2$  が分かれば求められる量になります。こうして求めた  $B$  と  $C$  を使って、等価アドミッタンスは、

$$\eta_E = \frac{H_a}{E_a} = \frac{C}{B} \quad (70)$$

<sup>16</sup>  $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$  を薄膜系の特性マトリクスと言うらしいです。列ベクトルなのですが。

と求めることができ、振幅反射率が求められます。

この  $B$  と  $C$  を使えば振幅反射率だけでなく、振幅透過率も求めることができます。まとめて書くと以下ようになります。

$$\begin{cases} \rho &= \frac{\eta_0 - \eta_E}{\eta_0 + \eta_E} = \frac{\eta_0 - \frac{C}{B}}{\eta_0 + \frac{C}{B}} = \frac{B\eta_0 - C}{B\eta_0 + C} \\ \tau &= \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_E} \cdot \frac{E_b}{E_a} = \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \frac{C}{B}} \cdot \frac{1}{B} = \frac{2\eta_0}{B\eta_0 + C} \end{cases} \quad (71)$$

また、エネルギー反射率  $R$  および透過率  $T$  は、

$$\begin{cases} R &= |\rho|^2 = \left( \frac{B\eta_0 - C}{B\eta_0 + C} \right) \left( \frac{B\eta_0 - C}{B\eta_0 + C} \right)^* \\ T &= \frac{\text{Re}(\eta_2)}{\eta_0} |\tau|^2 = \frac{4\eta_0 \text{Re}(\eta_2)}{(B\eta_0 + C)(B\eta_0 + C)^*} \end{cases} \quad (72)$$

となります<sup>17</sup>。

#### 4.4 多層膜への応用

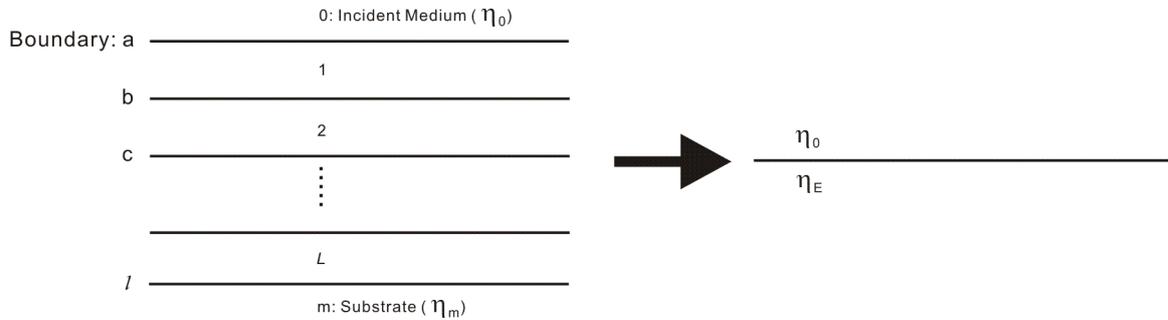


図 20: 多層膜系

特性マトリクスによる計算を多層膜系 ( $L$  層; 図 20) に応用します。単層系のとほとんど変わりません。図の多層膜系の特性マトリクス  $M$  は、層  $j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, L$ ) の特性マトリクスを  $M_j$  として、

$$M = \prod_{j=1}^L M_j \quad (73)$$

と書けます。従って界面  $a$  と  $l$  の電磁場の振幅は、

$$\begin{pmatrix} E_a \\ H_a \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^L M_j \begin{pmatrix} E_l \\ H_l \end{pmatrix} \quad (74)$$

と書けます。ここで各成分を  $E_l$  で割ると、

$$\begin{pmatrix} E_a/E_l \\ H_a/E_l \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^L M_j \begin{pmatrix} 1 \\ H_l/E_l \end{pmatrix} \quad (75)$$

となります。ここで基板  $m$  では+方向に進行する波しかないので  $H_l/E_l$  は基板の傾斜アドミッタンス  $\eta_m$  に等しくなります。ここで薄膜系の特性マトリクス

<sup>17</sup>入射媒質に吸収がないことを仮定しているのので  $\eta_0$  は実数であることをお忘れ無く。念のため。

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_a/E_l \\ H_a/E_l \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^L M_j \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_m \end{pmatrix} \quad (76)$$

を導入します。

以下、単層膜のときと全く同じ議論が続きます。単層膜のときと同様、界面  $a$  での電場・磁場の振幅について以下の式が成り立ちます。

$$\begin{cases} E_a &= E_{0a}^+ + E_{0a}^- \\ H_a &= H_{0a}^+ - H_{0a}^- = \eta_0(E_{0a}^+ - E_{0a}^-) \end{cases} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{0a}^+ &= \frac{\eta_0 E_a + H_a}{2\eta_0} \\ E_{0a}^- &= \frac{\eta_0 E_a - H_a}{2\eta_0} \end{aligned} \quad (78)$$

従って、振幅反射率  $\rho$  は、

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E_{0a}^-}{E_{0a}^+} = \frac{\eta_0 E_a - H_a}{\eta_0 E_a + H_a} = \frac{\eta_0 - \frac{H_a}{E_a}}{\eta_0 + \frac{H_a}{E_a}} \\ &= \frac{\eta_0 - \eta_E}{\eta_0 + \eta_E} \quad \left( \text{等価アドミッタンス } \eta_E \equiv \frac{H_a}{E_a} = \frac{C}{B} \right) \\ &= \frac{B\eta_0 - C}{B\eta_0 + C} \end{aligned} \quad (79)$$

と計算できます。これは単層膜のときと同様、多層系を単一の界面の問題に帰着して考えられることを示しています (図 20)。

同様に、振幅透過率も計算できて、

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{E_l}{E_{0a}^+} = \frac{2\eta_0 \cdot E_l}{\eta_0 E_a + H_a} \\ &= \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_E} \cdot \frac{E_l}{E_a} \\ &= \frac{2\eta_0}{\eta_0 B + C} \end{aligned} \quad (80)$$

となります。またエネルギー反射率・透過率は、

$$\begin{cases} R &= |\rho|^2 = \left( \frac{B\eta_0 - C}{B\eta_0 + C} \right) \left( \frac{B\eta_0 - C}{B\eta_0 + C} \right)^* \\ T &= \frac{\text{Re}(\eta_m)}{\eta_0} |\tau|^2 = \frac{4\eta_0 \text{Re}(\eta_m)}{(B\eta_0 + C)(B\eta_0 + C)^*} \end{cases} \quad (81)$$

となります。さらにエネルギー吸収率  $A = 1 - R - T$  を計算すると、

$$A = \frac{4\eta_0 \text{Re}(BC^* - \eta_m)}{(B\eta_0 + C)(B\eta_0 + C)^*} \quad (82)$$

となります。

#### 4.5 非対称透過膜はあるか？[再考]

ここで非対称透過膜が無いことを、特性マトリクスを用いて証明してみましょう。非対称透過膜とは、一方の側(表とします)から光を入射させたときと、その裏側から先ほどの透過光と正反対の向きに入射させたときとで、透過率が異なる薄膜系のことでした。証明のポイントは、単層の特性マトリクスは対角要素が2つとも  $\cos \delta$  で等しいということです。対角要素が等しいということを利用するために、次の定理を証明しておきましょう。

##### 定理

それぞれ対角要素が等しい2行2列の行列  $M_1 \sim M_q$  について、その積を

$$\begin{aligned} M &= M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_q = [a_{ij}] \\ M' &= M_q \cdot M_{q-1} \cdot \dots \cdot M_1 = [a'_{ij}] \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{cases} a_{ij} = a'_{ij} & (i \neq j) \\ a_{11} = a'_{22} \\ a_{22} = a'_{11} \end{cases} \quad (83)$$

である。

証明は数学的帰納法を用いると簡単です。

まず  $q = 1$  のとき、(83) 式が成り立つのは明らかです。

次に  $q = k$  のとき、(83) 式が成り立つと仮定しましょう。すると、

$$M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_k = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \quad M_k \cdot M_{k-1} \cdot \dots \cdot M_1 = \begin{pmatrix} w & y \\ z & x \end{pmatrix}$$

とおくことができます。ここに  $M_{k+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$  をかけると、

$$\begin{aligned} M &= M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_k \cdot M_{k+1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + ay \\ az + cw & bz + aw \end{pmatrix} \\ M' &= M_{k+1} \cdot M_k \cdot \dots \cdot M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & y \\ z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz + aw & bx + ay \\ az + cw & ax + cy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、(83) 式が成り立ちます(証明完了)。

さて、準備が終わったので非対称透過膜が存在しないことを証明しましょう。図 21 のような薄膜系 ( $0, m$  は吸収無し、すなわち  $\eta_0, \eta_m$  は実数と仮定) を考え、I の向きに入射するときの特性マトリクスを  $M_I$ 、その正反対の II の向きに入射するときの特性マトリクスを  $M_{II}$  としま

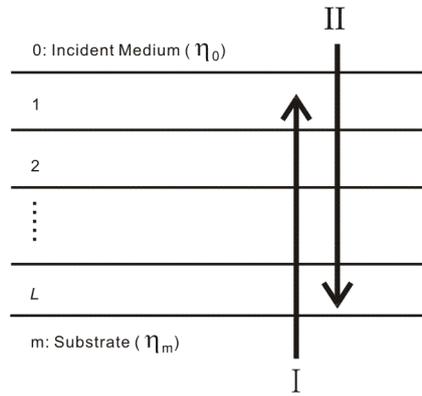


図 21: 薄膜系

しょう。定理より、 $M_I$ 、 $M_{II}$  は次のように書くことができます。

$$M_I = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix} M_{22} & M_{12} \\ M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}$$

ここでそれぞれについて薄膜系の特性マトリクスは、

$$\begin{pmatrix} B_I \\ C_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_{II} \\ C_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{22} & M_{12} \\ M_{21} & M_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \quad (84)$$

となります。よって、I の場合のエネルギー透過率は、(81) より、

$$T_I = \frac{4\eta_0\eta_m}{|B_I\eta_0 + C_I|^2} = \frac{4\eta_0\eta_m}{|(M_{11} + M_{12}\eta_m)\eta_0 + M_{21} + M_{22}\eta_m|^2}$$

となります。一方で II の場合のエネルギー透過率も

$$T_{II} = \frac{4\eta_0\eta_m}{|B_{II}\eta_m + C_{II}|^2}$$

$$= \frac{4\eta_0\eta_m}{|(M_{22} + M_{12}\eta_0)\eta_m + M_{21} + M_{11}\eta_0|^2}$$

$$= \frac{4\eta_0\eta_m}{|(M_{11} + M_{12}\eta_m)\eta_0 + M_{21} + M_{22}\eta_m|^2}$$

$$= T_I$$

となり、 $T_I = T_{II}$  となることが証明されました。

#### 4.6 ポテンシャル透過率

ここでポテンシャル透過率というものを導入しておきます。ポテンシャル透過率とは、着目している薄膜系の透過率の上限を与えるものです。以下、具体的に見ていきましょう。

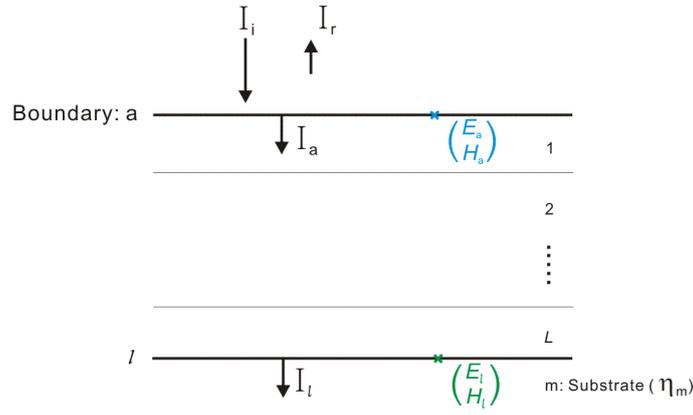


図 22: 薄膜系と界面におけるエネルギーの流れ

図 22 のような  $1 \sim L$  と基板  $m$  からなる薄膜系を考えましょう。

界面  $a$  におけるエネルギーの流れ  $I_a$  とします。  $a$  より上の入射媒質では吸収がない、もしくは無視できるほど小さいとすると、エネルギーの流れは入射方向と反射方向に分けて考えても良いので、それぞれ  $I_i$ 、  $I_r$  とします。すると  $I_i = I_a + I_r$  が成り立ちます。また、界面  $l$  におけるエネルギーの流れを  $I_l$  としましょう。

ここで、この薄膜系のポテンシャル透過率  $\Psi$  を次のように定義します。

$$\Psi = \frac{I_l}{I_a} \quad (85)$$

すると、エネルギー透過率  $T$  は、

$$T = \frac{I_l}{I_i} = \frac{I_l}{I_a + I_r} \leq \frac{I_l}{I_a} = \Psi$$

となり、  $T \leq \Psi$  が言え、これはエネルギー透過率の上限がポテンシャル透過率で与えられるということを示しています。

では具体的に  $\Psi$  を求めてみましょう。  $1 \sim L$  の多層系のマトリクスを  $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$  とします。すると、

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{2} \text{Re}(E_a \cdot H_a^*) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}((E_l \cdot B) \cdot (E_l \cdot C)^*) \\ &= \frac{1}{2} |E_l|^2 \text{Re}(BC^*) \\ I_l &= \frac{1}{2} |E_l|^2 \text{Re}(\eta_m) \end{aligned}$$

なので、ポテンシャル透過率は、

$$\Psi = \frac{I_l}{I_a} = \frac{\text{Re}(\eta_m)}{\text{Re}(BC^*)} \quad (86)$$

となります。この薄膜系の上に、層を加えたとしても (86) 式は変わりません<sup>18</sup>。

<sup>18</sup>ただし、  $B, C, \eta_m$  を含むことから下の層のアドミッタンスには依存します。

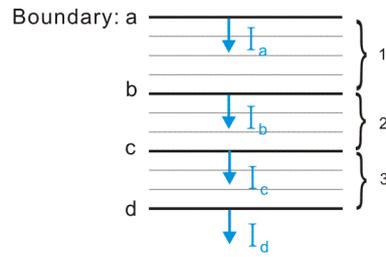


図 23: 1,2,3 の部分に分割した薄膜系

次に、図 23 のように多層 1、2、3 がさらに積層された薄膜系を考えます。境界を  $a \sim d$  と置いてみます。1～3 の各部分のポテンシャル透過率を  $\Psi_1 \sim \Psi_3$  とすると、この系全体のポテンシャル透過率は、

$$\Psi = \frac{I_d}{I_a} = \frac{I_b}{I_a} \frac{I_c}{I_b} \frac{I_d}{I_c} = \Psi_1 \cdot \Psi_2 \cdot \Psi_3$$

となります。このことから、一般に全体のポテンシャル透過率は各部分のポテンシャル透過率の積になるということが分かります。