解答

平成 26 年 3 月 10 日

1　空間図形

1.1　多面体の面と辺

問 1.1 四角すいの面の数と頂点の数と辺の数をそれぞれ答えよ

答え　面の数 : 5、頂点の数 : 5、辺の数 : 8

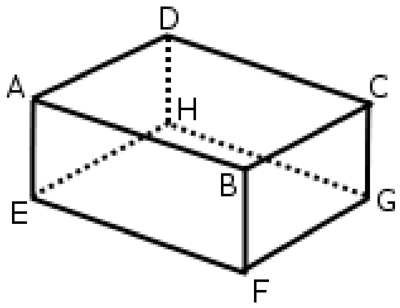
問 1.2 立方体の面の数と頂点の数と辺の数をそれぞれ答えよ

答え　面の数 : 6、頂点の数 : 8、辺の数 : 12

問 1.3 三角柱の面の数と頂点の数をそれぞれ答えよ

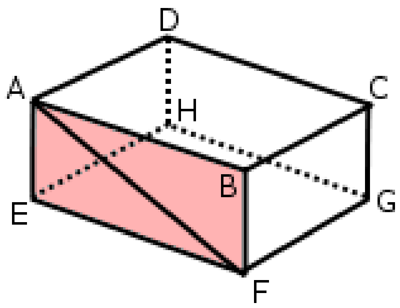
答え　面の数 : 5、頂点の数 : 6、辺の数 : 9

問 1.4 次の直方体 $ABCD-EFGH$ において直線 AF と垂直に交わる辺をすべて求めよ。

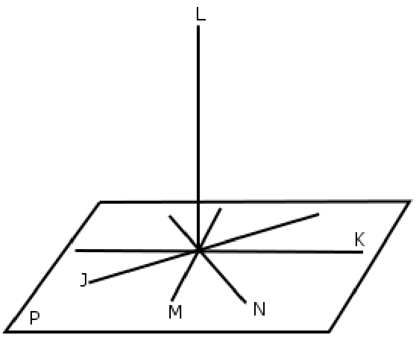


答え　辺 AD, 辺 FG

解説　面 $ABFE$ と辺 AD , 辺 FG はそれぞれ垂直であるので面 $ABFE$ に含まれる AF とも垂直になる。

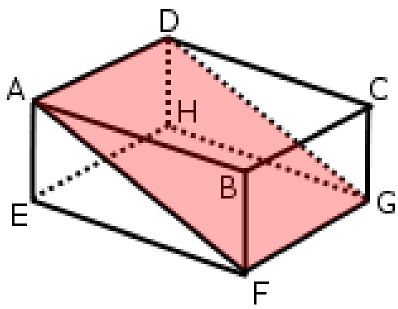


NOTE　平面 P に垂直な直線 L においては直線 L と平面 P との交点をとおる平面上のすべての直線が L と垂直である。

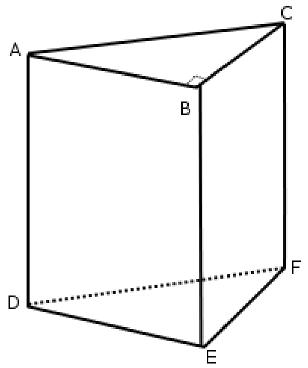


上の図でいうと $L \perp P$ であるならば
$L \perp J$,$L \perp K$,$L \perp M$,$L \perp N$,

おまけ　直方体 $ADGF$ は長方形になる。

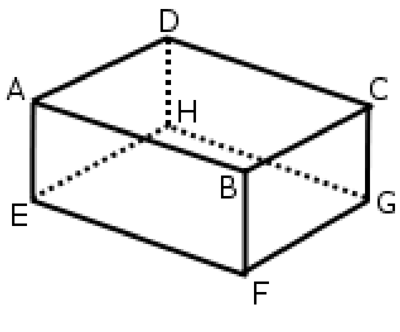


問 1.5 三角柱 $ABC-DEF$ において $\angle ABC$ が直角であるとき辺 CF と垂直に交わっている辺をすべて求めよ。



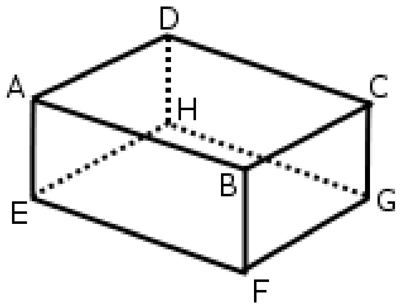
答え　辺 AC, 辺 BC, 辺 DF, 辺 EF

問 1.6 次の直方体 $ABCD-EFGH$ において辺 AB と垂直に交わる面をすべて求めよ。
また辺 AB と平行な面もすべて求めよ。



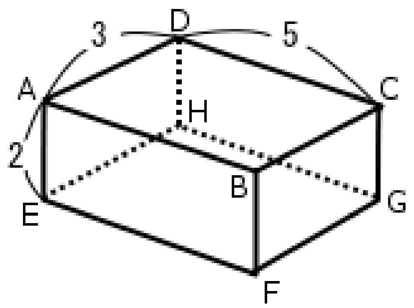
答え　垂直：面 $ADHE$, 面 $BCGF$
平行：面 $CDHG$, 面 $EFGH$

問 1.7 次の直方体 $ABCD-EFGH$ において面 $ABCD$ と垂直に交わる面をすべて求めよ。
また面 $ABCD$ と平行な面もすべて求めよ。



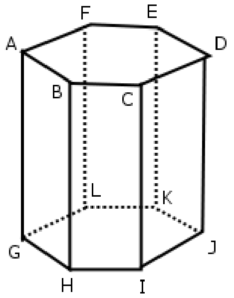
答え　垂直：面 $ADHE$, 面 $ABFE$, 面 $BCGF$, 面 $CDHG$
平行：面 $EFGH$

問 1.8 次の直方体 $ABCD-EFGH$ において直線 AC と E との距離を求めよ。



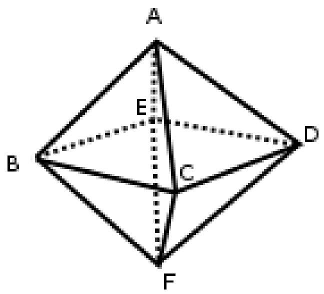
答え　2

問 1.9 次の正六角柱 $ABCDEF$-$GHIJKL$ において
(1) 辺 AB と平行な辺を求めよ
(2) 辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて求めよ。
(3) 直線 CF と平行である辺をすべて求めよ。
(4) 直線 AI と垂直に交わる辺をすべて求めよ。



答え　(1) 辺 ED, 辺 KJ, 辺 GH
(2) 辺 CI, 辺 DJ, 辺 EK, 辺 EL, 辺 HI, 辺 IJ, 辺 JK, 辺 KL, 辺 KL, 辺 LG
(3) 辺 AB, 辺 ED, 辺 GH , 辺 KJ
(4) 辺 AF, 辺 IJ

問 1.10 次の正八面体 $ABCDEF$ において辺 AB と平行な辺を求めよ
。また辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて求めよ。



答え　平行：辺 DF
ねじれ: 辺 CD, 辺 DE, 辺 CF , 辺 EF

問 1.11 ＊ 正十二面体の辺の数と頂点の数を求めよ。

答え　辺の数：30 個
頂点の数: 20 個

解説　正十二面体は 12 個の正五角形で構成されている。
12 個の正五角形の辺の数の総和は $12 \times 5 = 60$ 個である。
そして正十二面体の辺は正五角形の辺の 2 つが重なって出来ていることから
$60/2 = 30$ 個となる。
頂点も同様に考えてできる。
12 個の正五角形の頂点の数の総和は $12 \times 5 = 60$ 個である。
そして正十二面体の頂点は正五角形の辺の 3 つが重なって出来ていることから
$60/3 = 20$ 個となる。

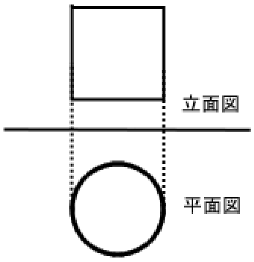
問 1.12 * 正二十面体の辺の数と頂点の数を求めよ。

答え　辺の数：30 個
頂点の数: 12 個

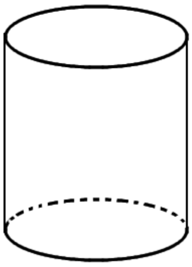
付録　上の問題を見て気づくことがある。
それは正十二面体と正二十面体の辺の数は等しい。そして
正十二面体の頂点の数　＝ 正二十面体の面の数
正二十面体の頂点の数　＝ 正十二面体の面の数
となっている。
このように正十二面体 $\longleftrightarrow$ 正二十面体の間にあるような関係を双対性（そうついせい）という
これは立方体（正六面体）$\longleftrightarrow$ 正八面体でも成り立つ。
実際, 立方体の頂点の数は 8 , 正八面体の面の数は 8,
正八面体の頂点の数は 6 , 立方体の面の数は 6
そして辺の数はともに 12 である。
また正四面体において双対なものは自分自身になっている。
正四面体 $\longleftrightarrow$ 正四面体
正四面体の頂点の数　＝ 正四面体の面の数
このように正多面体においては
正十二面体 $\longleftrightarrow$ 正二十面体
正八面体 $\longleftrightarrow$ 立方体
正四面体 $\longleftrightarrow$ 正四面体
といった双対性が現れる。

1.2　投影図

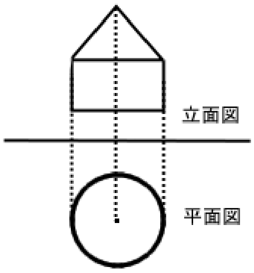
問 1.13 下のように投影図で表される立体の見取図を描け。



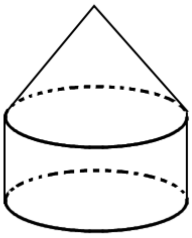
答え



問 1.14 下のように投影図で表される立体の見取図を描け。

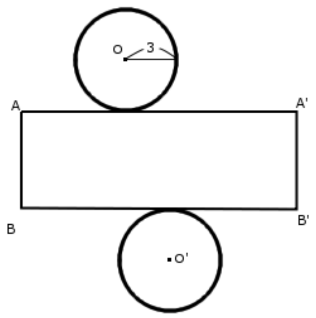


答え



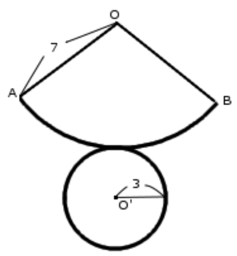
1.3　展開図

問 1.15 下は円柱の展開図である。
このとき AA' の長さを求めよ。



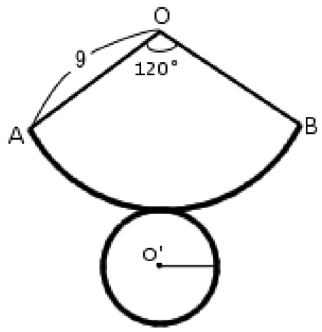
答え　6π

問 1.16 下は円すいの展開図である。
この円すいの母線の長さと底面の半径の長さを求めよ。



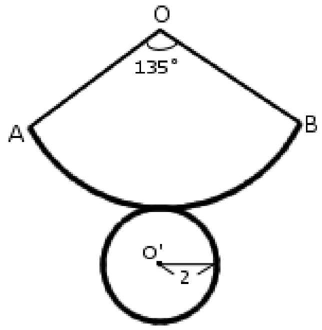
答え　母線の長さ:7
底面の半径:3

問 1.17 下は円すいの展開図である。
この円すいの底面の半径の長さを求めよ。



答え　3

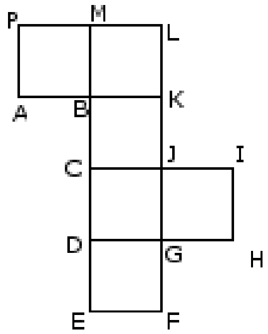
問 **1.18** 下は円すいの展開図である。
この円すいの底面の母線の長さを求めよ。



答え　$\frac{16}{3}$

解説　母線の長さを x とすると弧 AB の長さは $2 \times x \times \pi \times \frac{135}{360} = \frac{3}{4}\pi x$
底面の円周は 4π
底面の円周と弧 AB の長さは等しいから $\frac{3}{4}\pi x = 4\pi$
ゆえに $x = \frac{16}{3}$

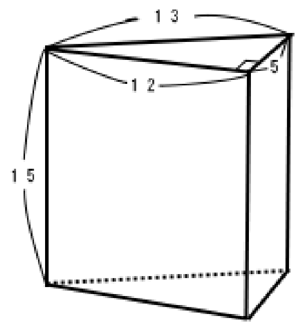
問 **1.19** 下は立方体の展開図である。
図の左上の点 P と元の立体で一致する点を A から M の中からすべて選べ。



答え　D

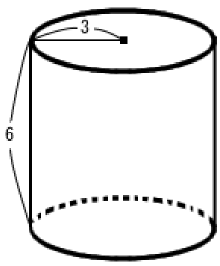
1.4　表面積と体積

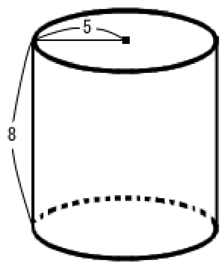
問 1.20 次の三角すいの表面積を求めよ（底面は直角三角形である）



答え　510

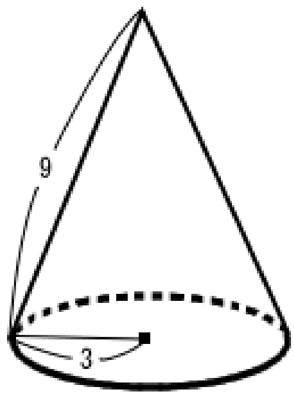
問 1.21 次の円柱の表面積を求めよ

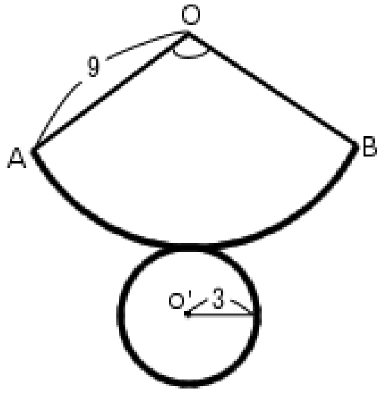




答え　左:54π
右:130π

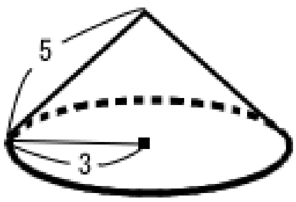
問 1.22 下の図は円錐とその展開図である。
(1)$\angle AOB$ を求めよ。
(2) 円錐の表面積 を求めよ。





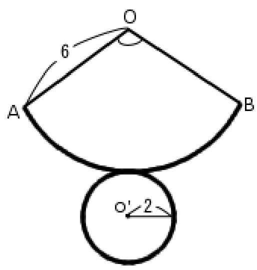
答え　(1):120°
(2):36π

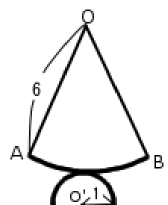
問 1.23 次の円すいの表面積を求めよ



答え　24π

問 1.24 次は円すいの展開図である。それぞれの $\angle AOB$ を求めよ。

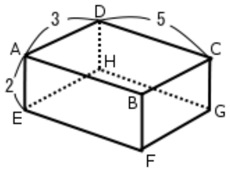


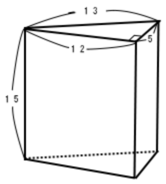


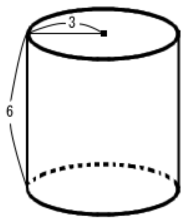
答え　左:120°

右:60°

問 1.25 次の柱体の体積を求めよ







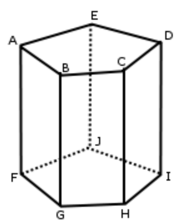
答え　直方体:30

三角柱:450

円柱:54π

問 1.26 下の図は五角柱である。

五角形 $ABCDE$ の面積が 30 、$AF = 5$ であるときその体積を求めよ。



答え　150

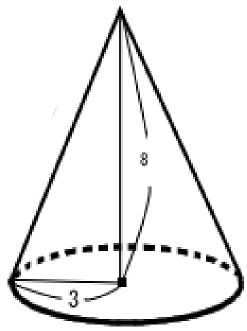
解説　柱体の体積は <u>底面積 × 高さ</u> なのでそれにしたがって計算する。

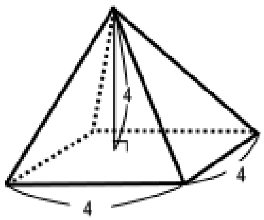
つまりこの五角柱の底面積は 30, 高さは 5 であるので

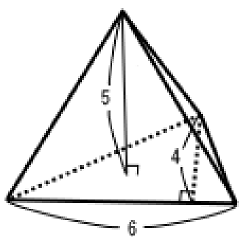
$30 \times 5 = 150$

NOTE　底面積が S, 高さが h の柱体の体積 V は
$V = Sh$ である。これは底面の形に関わらず成り立つ。

問 1.27 次のすい体の体積を求めよ

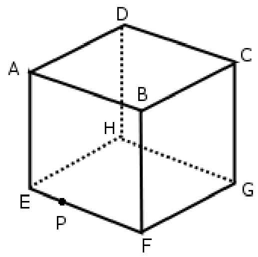






答え　円すい:24π
四角すい:$\frac{64}{3}$
三角すい:20

問 1.28 1 辺の長さが 4 の立方体 $ABCD-EFGH$ において
辺 EF 上に点 P をとる。
このとき三角すい $BPFG$ の体積が 24 になった。
このとき線分 PF の長さを求めよ。



答え　3

解説　PF の長さを x とすると、三角すい $BPFG$ の体積 V は
$V = 4 \times 4 \times x \times \frac{1}{2} = 8x$ となる。
ゆえに $8x = 24$ であるから $x = 3$

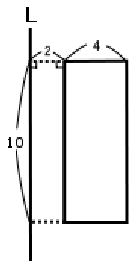
問 **1.29** 半径が 2 の球の体積と表面積を求めよ。

答え　体積 $\frac{32}{3}\pi$
表面積 16π

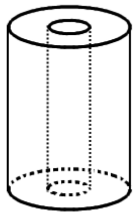
問 **1.30** 表面積が 64π であるような球の体積を求めよ。

答え　$\frac{256}{3}\pi$

問 **1.31** 下の図において L を軸に回転させたときに出来る立体の見取図を書け。

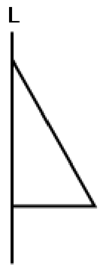


答え

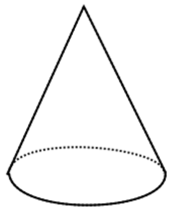


答え

問 **1.32** 下の図において L を軸に回転させたときに出来る立体の見取図を書け。

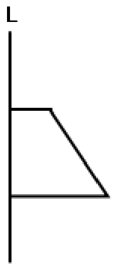


答え

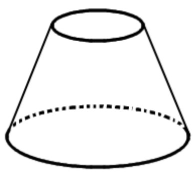


答え

問 1.33 下の図において L を軸に回転させたときに出来る立体の見取図を書け。

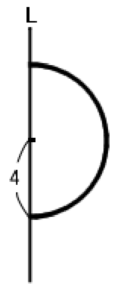


答え



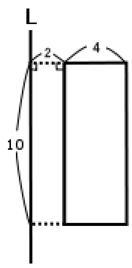
答え

問 1.34 下の図において L を軸に回転させたときに出来る立体の体積を求めよ。



答え　$\frac{256}{3}\pi$

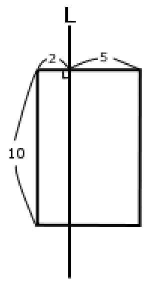
問 **1.35** 下の図において L を軸に回転させたときに出来る立体の体積を求めよ。



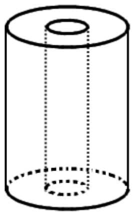
答え　320π

解説　半径 6 の円を底面とする円柱から半径 2 の円を底面とする円柱を抜いた形である。
つまり $6^2\pi \times 10 - 2^2\pi \times 10 = 320\pi$

問 **1.36** 下の図において L を軸に回転させたときに出来る立体の体積を求めよ。

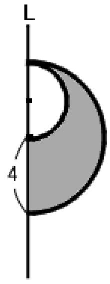


答え　250π



解説
直線の左側の長方形が回転によって作る円柱は直線の右側の長方形が回転によって作る円柱の内部に含まれる。
つまり求める立体は右側の長方形が回転によって作る円柱を考えればよい。
つまり $5^2\pi \times 10 = 250\pi$

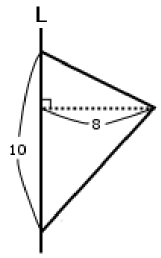
問 1.37 下の図において灰色の部分を L を軸に回転させたときに出来る立体の体積を求めよ。



答え　$\frac{224}{3}\pi$

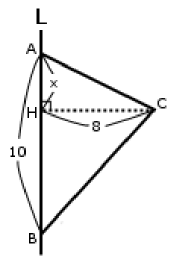
解説　半径 4 の球から半径 2 の球をくりぬいた形となる。
よって体積は半径 4 の球の体積から半径 2 の球の体積を引けばよい。
ゆえに求める体積は $4^3 \times \pi\frac{4}{3} - 2^3 \times \pi\frac{4}{3} = \frac{224}{3}\pi$

問 1.38 * 下の図において L を軸に回転させたときに出来る立体の体積を求めよ。



答え　$\frac{640}{3}\pi$

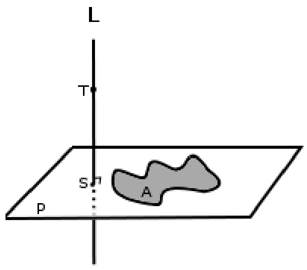
解説　2 つの円すいが底面で合わさった形をしているので体積は 2 つの円すいを求めればよい。



つまり上図の三角形 AHC を回転させてできる円すいと三角形 BHC を回転させてできる円すいを合わせた形である。
まず AH の長さを x とおくと体積は $8^2\pi \times x \times \frac{1}{3} = \frac{64x}{3}\pi$
次に下の円すいの高さは $10 - x$ となるので体積は $8^2\pi\ times(10 - x) \times \frac{1}{3} = \frac{640-64x}{3}\pi$
これを足し合わせると $\frac{64x}{3}\pi + \frac{640-64x}{3}\pi = \frac{640}{3}\pi$

問 1.39 下の図において平面 P 上にある図形 A の面積は 10 であった。
直線 L は平面 P と垂直に交わっておりその交点を S とする。また点 T は直線 L 上にあり $ST = 5$ である。

このとき直線 L にそって平行に点 S から点 T まで動かしたとき図形 A が動いてできる立体の体積を求めよ。



答え　50

解説　柱体の体積は底面積 $\times$ 高さなのでそれに従って計算すると
$10 \times 5 = 50$