

1 線型代数

1.1 集合

1.1.1 集合の定義

集合 (set) というのは”モノ”の集まりのことをいう。少しあいまいな表現になっているがこの定義も正確ではない。ただここでは厳密な公理には触れないことにする。さらに集合を構成する”モノ”のことを要素, または元 (げん) (element) という。また a が集合 A の元であるとき, a は A に属すといい $a \in A$ と表す。また a が A の元でないときは $a \notin A$ と表す。集合は元の要素をすべて列挙することで表される。

$$\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

例 1.1 1 から 4 までの整数の集合は $\{1, 2, 3, 4\}$

以下、整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表すものとする。¹

また $x \in X$ に関する命題 $P(x)$ が真となるようなもののみを選んだ集合を次のように表記する。

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

例 1.2 $4n + 1$ が素数となるような自然数 n の集合

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 4n + 1 \text{ は素数} \}$$

定義 1.1 (空集合) 元を持たない集合を空集合 (empty set) といい, $\emptyset$ で表す。²

1.1.2 部分集合

定義 1.2 (外延性公理) 集合 X, Y において

X が Y と等しい $\stackrel{def}{\iff} \forall x(x \in X \iff x \in Y)$

X と Y が等しいとき $X = Y$ と表す。また X と Y が等しくないとき $X \neq Y$ と表す。

定義 1.3 (部分集合) 集合 X, A において

A が X の部分集合 (subset) $\stackrel{def}{\iff}$ 任意の $a \in A$ に対して $a \in X$

¹自然数は 0 を含むものとする。0 を含まないものとする流派もある。

² $\emptyset$ はギリシャ文字 ϕ (ファイ) ではなくノルウェー語の $\emptyset$ が元である。しかし便宜上 ϕ で表すこともある。

A が X の部分集合であるとき $A \subset X$ と表す. $A \subset X$ は $A = X$ の場合も含んでいるが, 特に $A = B$ のケースを強調したいときは $A \subseteq X$ を使って表す. また $A \subset X$ かつ $A \neq X$ であるとき A は X の真部分集合 (proper subset) という.

例 1.3 $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

例 1.4 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

命題 1.1 集合 X, Y のにおいて, $X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ が成り立つとき, $X = Y$ が成り立つ.

命題 1.2 任意の集合 X のにおいて, $\emptyset \subset X$

定義 1.4 集合 X において X の部分集合全体の集合をべき集合 (powered set) といい $\mathfrak{P}(X)$ または $P(X)$ または 2^X と表す.

例 1.5 $\{1, 2, 3\}$ のべき集合は
 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

問題 1.1 n 個の元からなる集合 X において, べき集合 $\mathfrak{P}(X)$ の元の個数は 2^n 個であることを示せ.

定義 1.5 (和集合と共通部分) 集合 A, B において集合 $\{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$ を A と B の和集合 (union) といい, $A \cup B$ と表す.

また集合 $\{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$ を A と B の共通部分 (intersection) といい, $A \cap B$ で表す.

例 1.6 $\{1, 5\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 3, 4, 5\}$
 $\{1, 5\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1\}$

特に集合 A, B が共通の元を持たないとき $A \cap B = \emptyset$

定義 1.6 (差集合) 集合 A の元で集合 B の元でないものの集合を $A \setminus B$ または $A - B$ で表す. すなわち $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$ である.

定義 1.7 (直積) 集合 X, Y において, 順序が定まった対 (x, y) , $x \in X, y \in Y$ 全体からなる集合を X と Y の直積 (Cartesian product) といい $X \times Y$ で表す. すなわち $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ である.

また n 個の集合 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に対しても

$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_n \in X_n\}$
 である.

また一般的に $X \times Y \neq Y \times X$ である.

また $X \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times X = \emptyset$ となる.

例 1.7 $\{1, 5\} \times \{1, 3, 4\} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (5, 5), (5, 3), (5, 4)\}$

1.2 写像

定義 1.8 集合 S, T において $x \in S$ に対して $y \in T$ を唯一つ対応させるときその対応を写像 (map) という. また T が数の集合であるとき写像は関数 (function) と呼ばれる. f が S から T への写像であるとき $f: S \rightarrow T$ と書く. また $x \in S$ において写像 $f: S \rightarrow T$ によって対応する T の元を $f(x)$ と表す.

例 1.8 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ として

$f(x) = 2x$ をとると $f(2) = 4$, $f(5) = 10$, $f(7) = 14$ である.

X から Y への写像全体の集合を $\text{Map}(X, Y)$ または Y^X と表す.³

定義 1.9 (像と逆像) 集合 X, Y と写像 $f: X \rightarrow Y$ において Y の部分集合 $\{f(x) | x \in X\}$ を X の f による像 (image) といい $f(X)$ で表す. また Y の部分集合 S において集合 $\{x \in X | f(x) \in S\}$ を S の f による逆像 (inverse image) といい $f^{-1}(S)$ で表す.⁴

命題 1.3 集合 X, Y と写像 $f: X \rightarrow Y$ において $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$

定義 1.10 (関数の合成) 写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ において, x に対し $g(f(x))$ を対応させる写像を合成写像 (composite map) といい $g \circ f$ または gf と表す.

定義 1.11 (制限と拡張) 写像 $f: X \rightarrow Y$ において S が X の部分集合であるとき (すなわち $S \subset X$), S の任意の元 s に対して $f(s)$ を対応させることで $S \rightarrow Y$ の写像が作ることが出来る.

これを f の S による制限 (restrict) といい $f|_S$ と表す.

また T が X を含む集合であるとき (すなわち $X \subset T$),

$g: T \rightarrow Y$ という写像があり, $g|_X = f$ となっているとき,

g を f の T への拡張 (expand) という.

定義 1.12 (単射と全射) 写像 $f: X \rightarrow Y$ において, $f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$ が成り立つような f を単射 (injection) といい, $f(X) = Y$ が成り立つような f を全射 (surjection) という. 全射かつ単射な写像を全単射 (bijection) という.

³ X のべき集合を 2^X と表す表記は、べき集合というのが X の各元が部分集合に含まれるか否かを判定する関数全体の集合と見なせるからである. すなわち、部分集合に入る場合を 1, そうでない場合を 0 とすると $\{0, 1\}^X$ となり $\{0, 1\}$ を 2 と見なして 2^X と表記する.

⁴紛らわしいが後で出てくる逆写像の像ではないので注意する

定義 1.13 (恒等写像) 写像 $f: X \rightarrow X$ が $f(x) = x$ と定義されるとき f 恒等写像 (identity map) といい, id または id_X または 1_X で表す.

命題 1.4 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるとき, $g: Y \rightarrow X$ が存在し $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ となる.

証明 f は全射であるから任意の $y \in Y$ に対し, $f(x_y) = y$ となるような $x_y \in X$ が存在する. f は単射であるから任意の y に対して x_y のとり方は一意的である. すなわち y に対して x_y を対応させることにより写像 $g: Y \rightarrow X$ が定義できる. これが $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ を満たすことを示そう.

g の定義から $f \circ g = id_Y$ は明らか.

また任意の x に対し, $f(g(f(x))) = f(x)$ であり f は単射であるから $g(f(x)) = x$, すなわち $g \circ f = id_X$ となる. $\square$

定義 1.14 (逆写像) 命題 1.4 における写像 $g: Y \rightarrow X$ を f の逆写像 (inverse map) といい f^{-1} で表す.

問題 1.2 写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ において,

- (1) $g \circ f$ が全射であるとき, g は全射であることを示せ.
- (2) $g \circ f$ が単射であるとき, f は単射であることを示せ.

問題 1.3 写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ が $f(x) = 3x + 1$ で定義されるとき, f は全射であるか, 単射であるかそれぞれ判定せよ.

問題 1.4 写像 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ が $f(x) = 3x + 1$ で定義されるとき, f は全射であるか, 単射であるかそれぞれ判定せよ.
また全単射である場合は f の逆写像も求めよ.

1.2.1 関係と商集合

集合というのはそれ自身では各々の元の間には何のかかわりもないバラバラなものである. そこに何かしらの構造や関係といったものを入れることで生じる性質が数学において考察の対象となる. そこで関係というものを定義してみよう.

定義 1.15 集合 X において関係 R を定めるとは $X \times X$ の部分集合 R を定めることである.

$(x, y) \in X \times X$ において $(x, y) \in R$ であるとき, xRy と表記する.

例 1.9 集合 X のべき集合 $\mathfrak{P}(X)$ において $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \mid A \subset B\}$ は $\mathfrak{P}(X)$ における関係となる. これを包含関係という.

定義 1.16 (同値関係) 集合 X における関係 $\sim$ が同値関係 (equivalence relation) とは次の条件を満たす関係である.

- (1) 任意の $x \in X$ に対して, $x \sim x$. (反射律)
- (2) 任意の $x, y \in X$ に対して, $x \sim y$ ならば $y \sim x$. (対称律)
- (3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $x \sim y$, $y \sim z$ ならば $x \sim z$. (推移律)

例 1.10 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ において, 関係 $x \sim y$ を $x - y$ が 3 の倍数であることとすると, 関係 $\sim$ は同値関係である.

命題 1.5 集合 X において関係 $\sim$ が同値関係であるとき, $C(x) = \{y \in X | x \sim y\}$ とする. このとき $C(x_1) \cap C(x_2) \neq \emptyset$ ならば $C(x_1) = C(x_2)$ である.

証明は明らか. これと $X = \bigcup_{x \in X} C(x)$ であることから, ある添え字集合 Λ に対して

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C(x_\lambda),$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \text{ に対し, } C(x_{\lambda_1}) \cap C(x_{\lambda_2}) = \emptyset$$

とできる.⁵ つまり X を互いに交わらない $C(x)$ たちに分割できるということである.

このような $C(x)$ を同値類 (equivalence class) という. また同値類 $C(x)$ に属する元を $C(x)$ の代表元といい, 各 $C(x_\lambda)$ から一つずつ代表元 x'_λ を選んだとき $\{x'_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を完全代表系という. また同値類全体の集合を商集合 (quotient set) といい, $X/\sim$ のように表す.

例 1.11 例 1.10 の同値関係において, 同値類は

$$\bar{0} = \{3n | n \in \mathbb{N}\}, \quad \bar{1} = \{1 + 3n | n \in \mathbb{N}\}, \quad \bar{2} = \{2 + 3n | n \in \mathbb{N}\}$$

の 3 つである. 商集合は $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ となる. $\{0, 1, 2\}$ は完全代表系となる.

また $\{3, 4, 5\}$ や $\{0, 7, 14\}$ も完全代表系である.

例 1.12 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ において関係を

$$\sim = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), \\ (1, 3), (3, 1), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$$

として定めると $\sim$ は同値関係である.

$$\text{また } \bar{1} = \{1, 2, 3\}, \bar{4} = \{4, 5\}, \bar{6} = \{6\} \text{ として } A/\sim = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{6}\}$$

例 1.13 $A \subset X$ とする. $\text{Map}(X, Y)$ に対して, $f \sim g$ を任意の $a \in A$ に対して $f(a) - g(a) = 0$ とすると, $\sim$ は同値関係である.

例 1.14 有理数を整数から定義してみよう. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して $(a, b) \sim (c, d)$ を $ad - bc = 0$ として定義すると, $\sim$ は同値関係である. ここで $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim$ として定義される.

⁵ $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} C(x_\lambda)$