53 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を次の比に内分する点，外分する点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 →図p.30 例14

(1) 4：3　　*(2) 2：5　　(3) 1：6

53 (1) 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対して，線分 AB を 4：3 に内分する点，外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

$$\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{4+3}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$$

$$\frac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4-3}=-3\vec{a}+4\vec{b}$$

(2) 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対して，線分 AB を 2：5 に内分する点，外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

$$\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{2+5}=\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$$

$$\frac{-5\vec{a}+2\vec{b}}{2-5}=\frac{5}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$$

(3) 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対して，線分 AB を 1：6 に内分する点，外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

$$\frac{6\vec{a}+\vec{b}}{1+6}=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$$

$$\frac{-6\vec{a}+\vec{b}}{1-6}=\frac{6}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}$$

54 3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC，CA，AB を 3：2 に内分する点を，それぞれD，E，F とする。△DEF の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。 →図p.31 例題6(1)

54 点 D，E，F の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ とすると，$\vec{g}=\dfrac{\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{3}$ である。

また

$$\vec{d}=\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{5},\ \vec{e}=\frac{2\vec{c}+3\vec{a}}{5},\ \vec{f}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$

であるから

$$\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{5}+\frac{2\vec{c}+3\vec{a}}{5}+\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$
$$=\frac{5\vec{a}+5\vec{b}+5\vec{c}}{5}$$
$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

よって

$$\vec{g}=\frac{\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

55 3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC，CA，AB を 1：2 に内分する点を，それぞれ D，E，F とする。

等式 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ が成り立つことを証明せよ。 →図p.31 例題6(2)

55 D，E，F の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ とすると

$$\vec{d}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3},\ \vec{e}=\frac{2\vec{c}+\vec{a}}{3},\ \vec{f}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

よって

$$\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}+\frac{2\vec{c}+\vec{a}}{3}+\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$
$$=\frac{3\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}}{3}$$
$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

したがって

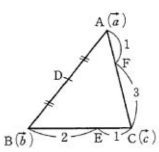
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=(\vec{d}-\vec{a})+(\vec{e}-\vec{b})+(\vec{f}-\vec{c})$$
$$=(\vec{d}+\vec{e}+\vec{f})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$=\vec{0}$$

56 3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 AB の中点を D，辺 BC，CA をそれぞれ 2：1，3：1 に内分する点を順に E，F とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{BE}$　(3) $\overrightarrow{CD}$　(4) $\overrightarrow{AE}$　(5) $\overrightarrow{DF}$

56 (1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$
$=\vec{c}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}$
$=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}-\vec{b}$
$=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$



別解 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$
$=\dfrac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$
$=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c}$
$=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}$
$=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}-\vec{a}$
$=-\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

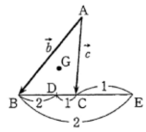
(5) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}$
$=\dfrac{\vec{c}+3\vec{a}}{3+1}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$
$=\dfrac{1}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

57 △ABC において，辺 BC を 2：1 に内分する点を D，外分する点を E とし，△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

*(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{AE}$　*(3) $\overrightarrow{AG}$　(4) $\overrightarrow{BD}$　*(5) $\overrightarrow{GD}$

57 点 A に関する位置ベクトルと考える。

(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}$
$=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$



(2) $\overrightarrow{AE}=\dfrac{-\vec{b}+2\vec{c}}{2-1}$
$=-\vec{b}+2\vec{c}$

(3) 辺 BC の中点を M とすると

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$
$=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$
$=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)-\vec{b}$
$=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

別解 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})$
$=-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(5) $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}$
$=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$
$=\dfrac{1}{3}\vec{c}$

58 OA＝7，OB＝3，AB＝6 である △OAB の内心を I とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

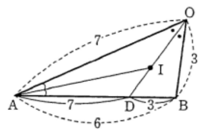
(1) ∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を D とするとき，$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

58 (1) OD は ∠AOB の二等分線であるから
AD：DB＝OA：OB＝7：3

よって　$\overrightarrow{OD}=\dfrac{3\vec{a}+7\vec{b}}{7+3}=\dfrac{3}{10}\vec{a}+\dfrac{7}{10}\vec{b}$

(2) $AD=6\times\dfrac{7}{10}$
$=\dfrac{21}{5}$



AI は ∠OAD の二等分線であるから

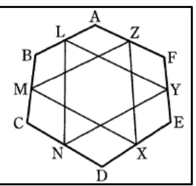
$OI：ID＝AO：AD＝7：\dfrac{21}{5}＝5：3$

よって，I は線分 OD を 5：3 に内分する点である。

したがって

$\overrightarrow{OI}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OD}$
$=\dfrac{5}{8}\times\left(\dfrac{3}{10}\vec{a}+\dfrac{7}{10}\vec{b}\right)$
$=\dfrac{3}{16}\vec{a}+\dfrac{7}{16}\vec{b}$

59 六角形 ABCDEF において，各辺の中点を右の図のように，それぞれ L，M，N，X，Y，Z とする。このとき，△LNY と △MXZ の重心が一致することを証明せよ。



59 6つの頂点 A，B，C，D，E，F および各辺の中点 L，M，N，X，Y，Z の位置ベクトルを，それぞれ

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$，$\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$

とすると

$$\vec{l}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \vec{n}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},$$
$$\vec{x}=\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2},\ \vec{y}=\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2},\ \vec{z}=\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}$$

△LNY の重心を G$(\vec{g})$，△MXZ の重心を G′$(\vec{g'})$ とすると

$$\vec{g}=\frac{\vec{l}+\vec{n}+\vec{y}}{3}=\frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}$$

$$\vec{g'}=\frac{\vec{m}+\vec{x}+\vec{z}}{3}=\frac{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}+\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}$$

よって，$\vec{g}=\vec{g'}$ より，△LNY と △MXZ の重心は一致する。

60 $\triangle$ABC の重心を G とするとき，任意の点 P に対して，等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$ が成り立つことを示せ。

60 点 A，B，C，G，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{g}$，$\vec{p}$ とすると

(左辺) $=(\vec{a}-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{p}$

(右辺) $=3(\vec{g}-\vec{p})$

$=3\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{p}\right)$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{p}$

よって

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$

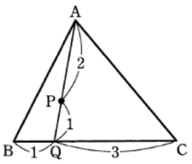
例題 8 $\triangle$ABC と点 P に対して，等式 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立つとき，点 P はどのような位置にあるか。

解答 点 A に関する位置ベクトルを考えて，等式を変形すると $-2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

整理して $6\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

すなわち $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+3}$

よって，**辺 BC を 1 : 3 に内分する点を Q とすると，P は線分 AQ を 2 : 1 に内分する点**である。 答



61 $\triangle$ABC と点 P に対して，等式 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立つ。

(1) 点 P はどのような位置にあるか。

(2) 面積の比 $\triangle$PBC : $\triangle$PCA : $\triangle$PAB を求めよ。

61 (1) 点 A に関する位置ベクトルを考えて，等式を変形すると

$-\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

整理して

$6\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

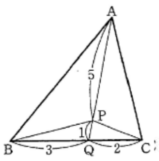
すなわち

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}$

$=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$

$=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+2}$

よって，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を Q とすると，P は線分 AQ を 5 : 1 に内分する点である。



(2) $\triangle$PBQ : $\triangle$PCQ

$=$ BQ : QC

$=3:2$

よって，$\triangle$PBQ $=3S$，$\triangle$PCQ $=2S$ とおくと

$\triangle$PBC $=\triangle$PBQ $+\triangle$PCQ

$=3S+2S=5S$

また $\triangle$PCA : $\triangle$PCQ $=$ AP : PQ

$=5:1$

これより $\triangle$PCA $=5\triangle$PCQ $=5\times 2S$

$=10S$

さらに $\triangle$PAB : $\triangle$PBQ $=$ AP : PQ

$=5:1$

よって $\triangle$PAB $=5\triangle$PBQ $=5\times 3S$

$=15S$

したがって

$\triangle$PBC : $\triangle$PCA : $\triangle$PAB $=5S:10S:15S$

$=1:2:3$

62 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-5\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=-5\vec{a}+7\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 A，B，C は一直線上にあることを証明せよ。 →図p.32

62 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}-5\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})$

$=2\vec{a}-3\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-5\vec{a}+7\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})$

$=-6\vec{a}+9\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{AC}=-3(2\vec{a}-3\vec{b})=-3\overrightarrow{AB}$

よって，3 点 A，B，C は一直線上にある。

63 次の 3 点が一直線上にあるように，x，y の値を定めよ。

*(1) A(3, 2)，B(6, 4)，C(x, -2)　(2) A(10, -1)，B(2, 1)，C(-2, y)

63 3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

(1) $\overrightarrow{AB}=(3,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(x-3,\ -4)$

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とすると

$(x-3,\ -4)=k(3,\ 2)$

よって

$x-3=3k$ ……①，$-4=2k$ ……②

①，② を解いて $k=-2$，$x=-3$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-8,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(-12,\ y+1)$

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とすると

$(-12,\ y+1)=k(-8,\ 2)$

よって

$-12=-8k$ ……①，$y+1=2k$ ……②

①，② を解いて $k=\dfrac{3}{2}$，$y=2$

64 $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ ($\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でない) とする。次の等式を満たす実数 s，t の値を求めよ。

(1) $2\vec{a}+s\vec{b}=t\vec{a}-\vec{b}$　*(2) $s\vec{a}+(3-2t)\vec{b}=\vec{0}$

*(3) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$，$\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}$ のとき $s\vec{c}+t\vec{d}=4\vec{a}+13\vec{b}$

64 (1) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$2=t$，$s=-1$

よって $s=-1$，$t=2$

(2) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$s=0$，$3-2t=0$

よって $s=0$，$t=\dfrac{3}{2}$

(3) $s\vec{c}+t\vec{d}=s(\vec{a}-2\vec{b})+t(2\vec{a}+3\vec{b})$

$=(s+2t)\vec{a}+(-2s+3t)\vec{b}$

よって，与えられた等式から

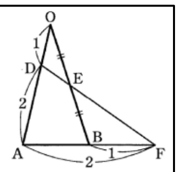
$(s+2t)\vec{a}+(-2s+3t)\vec{b}=4\vec{a}+13\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$s+2t=4$，$-2s+3t=13$

これを解いて $s=-2$，$t=3$

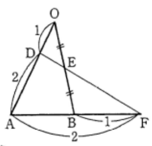
65 $\triangle$OAB において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を D，辺 OB の中点を E，辺 AB を 2 : 1 に外分する点を F とする。このとき，3 点 D，E，F は一直線上にあることを証明せよ。 →図p.32 応用例題 3



65 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$，

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，



AF : FB $=2:1$ であるから

$\overrightarrow{OF}=\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}=-\vec{a}+2\vec{b}$

よって

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}$

$=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{a}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

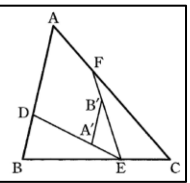
$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}$

$=-\vec{a}+2\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{a}=-\dfrac{4}{3}\vec{a}+2\vec{b}$

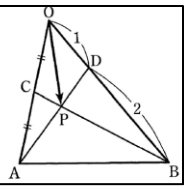
よって $\overrightarrow{DF}=4\overrightarrow{DE}$

したがって，3 点 D，E，F は一直線上にある。

66 $\triangle$ABC において，辺 AB，BC，CA を 2：1 に内分する点をそれぞれ D，E，F として，さらに線分 DE，EF を 2：1 に内分する点を A′，B′ とする。このとき，A′B′ // AB であることを証明せよ。



67 △OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を 1:2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



→教p.33 応用例題4

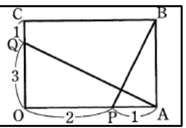
68 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を 1:2 に内分する点を C，辺 OA を 2:3 に内分する点を D とし，線分 CM と線分 BD の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき，AQ : QB を求めよ。

69 右の図の長方形 OABC において，OA$=3$，OC$=2$，OP：PA$=2:1$，OQ：QC$=3:1$ とするとき，BP$\perp$AQ であることを証明せよ。

→教p.34 応用例題 5



例題 9 平行四辺形 ABCD において，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2)=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$$

証明 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\vec{d}-\vec{b}$

よって　$2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2)-(\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2)$

$=2(|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2)-(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2)=0$

したがって　$2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2)=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ 終

70 △ABC において，辺 BC を 1：3 に内分する点を D とするとき，次の等式

70 $\triangle$ABC において，辺 BC を 1：3 に内分する点を D とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$3AB^2+AC^2=4(AD^2+3BD^2)$$

71 平行四辺形 ABCD において，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$$