Ｈ２３年度数学Ⅱ・数学Ｂ

第１問〔１〕

２乗を計算して

$t^2 = 2\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1$

また公式より

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ ，$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ だから与えられた y を計算すると

$y = t^2 - 2t - 2$

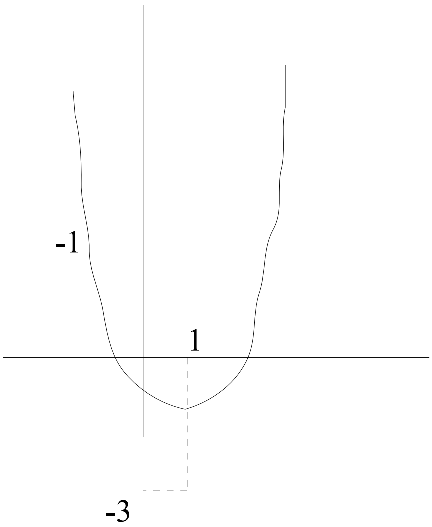
三角関数の合成公式より

$t = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ である。

$\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ より $\frac{-\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$ であるから、

よって $-1 \leq t \leq \sqrt{3}$

$y = (t-1)^2 - 3$



図を描いてみれば一目瞭然

$t = 1\left(\theta = \frac{-\pi}{6}\right)$ のとき

最小値-3 をとる。

〔２〕

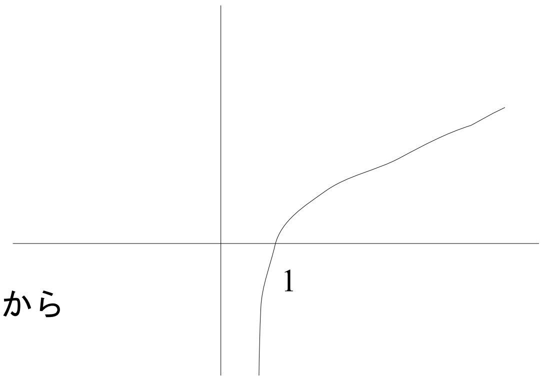
$\log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}X$ ゆえ

①は

$6X^2 - 7X - 20 > 0$

これ解くと

$X < \frac{-4}{3}, \frac{5}{2} < X$



log のグラフは右のようになるから

$\frac{5}{2} < X$ のみ考えればよい。

$5 < \log_2 x^2$

$5 = \log_2(32)$ だから $32 < x^2$ みたす最小の x を考える。

これは 6 とわかる。

条件②については

x=11 で $11 + \log_3 11 < 14$

x=12 で $12 + \log_3 12 > 14$ つまり最大の自然数は 11 である。

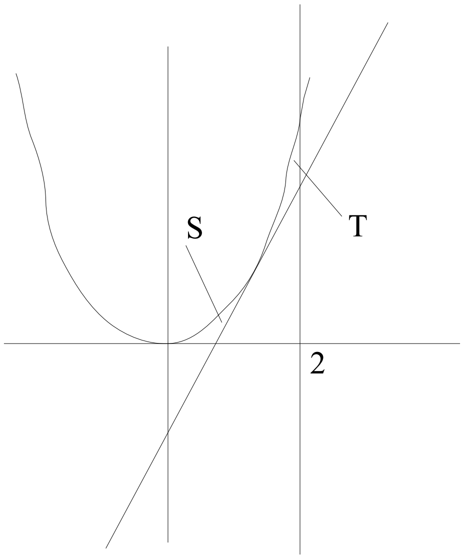
第２問

接線求める公式より

$$y=2ax-a^2$$

x 軸と交わる点は y=0 ゆえ

$x=\dfrac{a}{2}$　となる。



簡単な積分で S をもとめて

$$S=\frac{a^3}{12}$$

また

$$T=\int_a^2 (x^2-2ax+a^2)\,dx$$

$$=\frac{-a^3}{3}+2a^2-4a+\frac{8}{3}$$

U=S+T

$$=\frac{-1}{4}a^3+2a^2-4a+\frac{8}{3}$$

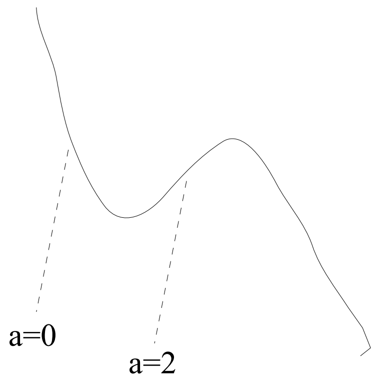
a	0		4/3		2		4	
			0				0	

U' = 0 を解くと　$a=4,\dfrac{4}{3}$　増減表書くと

３次の係数がマイナスゆえグラフは右図のようになる。

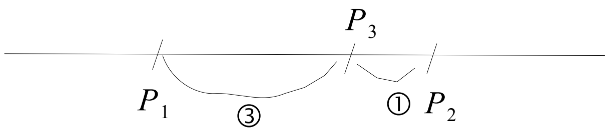
よって、a=4/3 で最小値とることがわかる。

計算すると最小値　$\dfrac{8}{27}$



第３問

$$x_3=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$



$$y_1=x_2-x_1=1$$

$$y_{n+1}=x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{-1}{4}(x_{n+1}-x_n)=\frac{-1}{4}y_n$$　←３点の距離関係考えれば、この式得られる

したがって

$$y_n=\left(\frac{-1}{4}\right)y_{n-1}=\ldots=\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$$

$$x_n-x_{n-1}=y_{n-1}$$
$$x_{n-1}-x_{n-2}=y_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$x_2-x_1=y_1$$

辺々たして

$$x_n-x_1=y_{n-1}+y_{n-2}+\ldots.+y_1$$

$$x_n=1+1+\left(\frac{-1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-2}$$

$$x_n=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$$

次に $r=\frac{1}{4}$ であり、 $S_n=\sum k|y_k|=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=1+2\left(\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ だから

$$S_n-rS_n=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}-nr^n$$

計算すると

$$S_n=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

第４問

$$\vec{OD}=\vec{OC}+\vec{CD}=\vec{c}+\vec{BA}=\vec{c}+\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

$\vec{OL}=\frac{1}{3}\vec{OD}=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$ ゆえ

$$\vec{AL}=\vec{OL}-\vec{OA}=\frac{-2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\vec{AN}=s\,\vec{AL}+T\,\vec{AM}=\left(\frac{-2}{3}s-t\right)\vec{a}+\left(\frac{-1}{3}s+\frac{1}{2}t\right)\vec{b}+\frac{1}{3}s\,\vec{c}$$

$$\vec{ON}=\vec{AN}-\vec{AO}=\left(1-\frac{2}{3}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{3}+\frac{t}{2}\right)\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}$$

点Nは辺OC上にあるのだから $\vec{a},\vec{b}$ の係数は0となる。

よって、tとsの連立方程式解くと $s=\frac{3}{4}$ が得られ、 $\vec{ON}=\frac{1}{4}\vec{c}$

△ABO で余弦定理使って

$$4r^2=1+1-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

よって、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1-2r^2$

∠BOC は 90 度だから $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$$AC=\sqrt{4r^2+4}$$

△OAC で余弦定理使って

$$AC^2=1+3-2\vec{a}\cdot\vec{c}$$

解いて、 $\vec{a}\cdot\vec{c}=-2r^2$

$$\vec{AM}\cdot\vec{MN}=(\vec{OM}-\vec{OA})\cdot(\vec{ON}-\vec{OM})=\ldots=-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{4}$$

=0 となるときとは、 $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、 $AB=2r=\sqrt{2}$