# 1　倍数の見分け方

## 1.1　用語説明

- ◯ 桁目
  下の桁から数える。一の位が 1 桁目、十の位が 2 桁目、...

## 1.2　2 の倍数の見分け方

2 の倍数の見分け方はとても簡単である。2 の倍数とはつまり偶数のことだから、偶数であるか否かが 2 の倍数かどうかの分かれ目だ。つまり、1 桁目が 0・2・4・6・8 の偶数——つまり 2 の倍数——であれば良い。(0 は全ての数の倍数）

では、何故一桁目を見れば良いのだろうか。それは、二桁目以上の数字を、2 で必ず割り切ることができるからである。

二桁目以上の数字は 10 の倍数であり、10 は 2 の倍数である。だから、2 の倍数である 10 で割り切れる数字は、必ず 2 で割り切れるのだ。

## 1.3　3 の倍数の見分け方

3 の倍数の見分け方は有名だが、知らない人も多いらしい。小さい素数の判定法は約数を調べる上で非常に重要なので、是非覚えて欲しい。

3 の倍数の見分け方は、「各桁の合計値が 3 の倍数であるかどうか」だ。ここで、三桁の例を挙げてみる。

$$\begin{aligned}123 &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \\ &= 1 \times (1 + 99) + 2 \times (1 + 9) + 3 \\ &= (1 \times 99 + 2 \times 9) + (1 + 2 + 3) \\ &= 3 \times (1 \times 33 + 2 \times 3) + (1 + 2 + 3)\end{aligned}$$

上記式において、$3 \times (1 \times 33 + 2 \times 3)$ は明らかに 3 の倍数だ。だから、残りの $(1 + 2 + 3)$ が 3 の倍数なら、元の 123 が 3 の倍数であることが分かる。

よく見ると（見なくても)、余った 1 と 2 と 3 は、元の数字の各桁の数字であることに気付く。だから、各桁の合計が 3 の倍数かどうかが 3 の倍数になるかどうかの決め手なのだ。

## 1.4　4 の倍数の見分け方

4 の倍数は 2 の倍数の応用である。つまり、4 の倍数である 100 の倍数は、4 で必ず割り切れるから、100 で割って余る下二桁が 4 の倍数であるかどうかを見れば良い。

## 1.5　5 の倍数の見分け方

これも 2 の倍数と同様である。5 の倍数である 10 の倍数は必ず 5 で割り切れる。だから 10 で割って余る下一桁が 0 か 5 という 5 の倍数であるかを確認すれば良い。

## 1.6　6 の倍数の見分け方

6 は $6 = 2 \times 3$ より、2 と 3 の倍数だから、両方の性質を持てば良い。つまり、各桁の合計が 3 の倍数で、且つ偶数であることが条件である。

## 1.7　8 の倍数の見分け方

8 の倍数は 2 の倍数と同様に、8 の倍数である 1000 の倍数が必ず 8 で割り切れることから、1000 で割って余る下三桁が 8 の倍数であれば良い。

## 1.8　9 の倍数の見分け方

9 の倍数は 3 の倍数の応用である。先程の式を少しいじると

$$\begin{aligned}123 &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \\ &= 1 \times (1 + 99) + 2 \times (1 + 9) + 3 \\ &= (1 \times 99 + 2 \times 9) + (1 + 2 + 3) \\ &= 9 \times (1 \times 11 + 2 \times 1) + (1 + 2 + 3)\end{aligned}$$

となる。$9 \times (1 \times 11 + 2 \times 1)$ は明らかに 9 の倍数だから、残る $1 + 2 + 3$、つまり各桁の合計が 9 の倍数ならば 9 の倍数。

しかし、123 の各桁の合計は $1 + 2 + 3 = 6$ であって 9 の倍数ではないので、123 は 9 の倍数ではない。

## 1.9　10 の倍数の見分け方

これまでのと同様に、下一桁が 0 ならば 10 の倍数。

## 1.10　11 の倍数の見分け方

これが少し面倒臭い。五桁の例を挙げる。

$$\begin{aligned}12345 &= 1 \times 10000 + 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \\ &= 1 \times (9999 + 1) + 2 \times (1001 - 1) + 3 \times (99 + 1) + 4 \times (11 - 1) + 5 \\ &= (1 \times 9999 + 2 \times 1001 + 3 \times 99 + 4 \times 11) + (1 - 2 + 3 - 4 + 5) \\ &= 11 \times (1 \times 909 + 2 \times 91 + 3 \times 9 + 4 \times 1) + (1 - 2 + 3 - 4 + 5)\end{aligned}$$

最後の行の $11 \times (1 \times 909 + 2 \times 91 + 3 \times 9 + 4 \times 1)$ は明らかに 11 の倍数だから、残りの $1 - 2 + 3 - 4 + 5$ が 11 の倍数ならば元の数字は 11 の倍数。

非常に分かり難いが、ともかく奇数桁の数値の合計と偶数桁の数値の合計の差が 0 か 11 の倍数のとき、その数字は 11 の倍数なのだ。

### 1.10.1　おまけ：11 の倍数判定——奇数桁

11 の倍数を判定するときの奇数桁は、$n \times (99 \ldots 99 + 1)$ となる。これは、99 を一ブロックとして考えると

- 1 桁目：$1 = 0 \times 99 + 1$
- 3 桁目：$100 = 1 \times 99 + 1$
- 5 桁目：$10000 = 9999 + 1 = 100 \times 99 + 1\ times99 + 1$

  $\vdots$

となるからである。

#### 1.10.2　おまけ：11 の倍数判定——偶数桁

11 の倍数を判定するときの偶数桁は、$n \times (10 \ldots 01 \times -1)$ となる。これは

- 2 桁目：$10 = 1 \times 11 - 1$
- 4 桁目：$1000 = 1001 - 1 = (990 + 11) - 1 = 11 \times 91 - 1$
- 6 桁目：$100000 = 100001 - 1 = (99000 + 990 + 11) - 1 = 9091 \times 11 - 1$

  $\vdots$

の様になるからであるし、また逆説的にいえば、$10 \ldots 01$ が、11 の倍数の条件である "奇数桁の数値の合計と偶数桁の数値の合計の差が 0 か 11 の倍数" の条件を満たすからだ。

# 2　おまけ：7 の倍数の見分け方

7 の倍数の見分け方というのは一応存在するのだが、実用上は試しに割ってみた方が速いくらい面倒臭い上に、幾つか存在する。ここではぐぐって出てきたものを解説するに留める。

## 2.1　3 桁以下の場合と 4 桁以上の場合で分割する場合

3 桁の場合を例に挙げる。

$$
\begin{aligned}
123 &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \\
&= 1 \times (2 + 98) + 2 \times (3 + 7) + 3 \\
&= (1 \times 98 + 2 \times 7) + (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3) \\
&= 7 \times (1 \times 14 + 2 \times 1) + (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3)
\end{aligned}
$$

つまり、3 桁目の 2 倍と、2 桁目の 3 倍と、1 桁目の合計が 7 の倍数であれば良いということになる。2 桁の数なら（見れば分かるという指摘は置いといて）2 桁目の 3 倍と 1 桁目の合計で判定する、ということになる。

また、4 桁以上の場合を 8 桁の場合を例に挙げて考える。

$$
\begin{aligned}
12345678 &= 12000000 + 345000 + 678 \\
&= 12 \times (1001 - 1) \times 1000 + 345 \times (1001 - 1) + 678 \\
&= 1001 \times (12 \times 1000 + 345) - 12\ times1000 - 345 + 678 \\
&= 7 \times 143 \times (12 \times 1000 + 345) - 12 \times (1001 - 1) - 345 + 678 \\
&= 7 \times 143 \times (12 \times 1000 + 345 - 12) - (-12) - 345 + 678 \\
&= 7 \times 143 \times (12 \times 1000 + 345 - 12) + 12 - 345 + 678
\end{aligned}
$$

1001 が 7 の倍数なので、それを上手く使ってやると、以上の様に 7 の倍数判定用の箇所を抽出できる。つまり、“下の桁から 3 桁ずつ区切っていった奇数組と偶数組の差が 7 の倍数ならば 7 の倍数” ということ。

## 2.2 分割しない場合

ある意味簡単だが、ある意味面倒手法である。4 桁の場合を考える。

$$
\begin{aligned}
1234 &= 123 \times 10 + 4 \\
&= 123 \times 10 + 4 \times (21 - 20) \\
&= 123 \times 10 - 4 \times 20 + 4 \times 21 \\
&= 10 \times (123 - 4 \times 2) + 4 \times 21 \\
&= 10 \times 115 + 4 \times 21 \\
&= 10 \times (11 \times 10 + 5) + 4 \times 21 \\
&= 10 \times 11 \times 10 + 5 \times (21 - 20) + 4 \times 21 \\
&= 10 \times 10 \times (11 - 5 \times 2) + 5 \times 21 + 4 \times 21
\end{aligned}
$$

以上より、21 をかけられている部分は全て 7 の倍数であることが明らかなので、残った部分――つまり、上記式では $11 - 5 \times 2$ の部分――が 7 の倍数であれば 7 の倍数であるということになる。

まとめると、

1 桁目と 2 桁目以上に分け、1 桁目の 2 倍を 2 桁目以降から引く動作を繰り返し、最終的に残った 1,2 桁の数値が 7 の倍数なら元の数字は 7 の倍数。

ということになる。

# 3 倍数判定法の意義

倍数判定法が約数を調べるときに有用なのはいうまでもない。つまり、約分するときに大いに役立つのだ。そんなときに一々ユークリッドの互助法を用いるよりは、地道に少しずつ素数を、時には大胆に大きな数の、約数を見つけていくことが、計算の高速化、ひいては正確化を実現するだろう。