1　解の公式

1.1　解の公式とは

解の公式とは、数学を学ぶ上で決して忘れてはならない “2 次方程式の解” を求める公式のことであり、次式で現される。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

また、$2b' = b$ とすることにより、[*1]

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{{b'}^2 - ac}}{a}$$

と現すこともできる。まずはこれを実際に導出してみる。

1.2　解の公式の導出

2 つの解 α, β を持つ 2 次方程式を考える（ただし、α と β は異なっていても同一でも構わない実数とする）。2 次の項の係数を a とすると、

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

となる。[*2]これを展開すると、

$$ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta = 0$$

また、$ax^2 + bx + c = 0$ という形で現すとすると、2 式を比較して $b = -a(\alpha + \beta), c = a\alpha\beta$ ということが分かる。

さて、仮定から、この 2 次方程式の解は α, β である。これを $-a(\alpha + \beta), a\alpha\beta$ を用いて現したい。そこで、まず α と β の平均を取り、α と β の差の半分を足したり引いたりすることで α, β としてみる。

式で現すと、

- 平均：$\frac{\alpha+\beta}{2}$
- 差の半分：$\frac{\alpha-\beta}{2}$[*3]
- $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$

となる。つまり、

$$\begin{aligned} x &= \alpha, \beta \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

[*1] 2 倍の b' と b が等しい、つまり b' は b の半分。

[*2] x に α, β を代入したとき、$(x - \alpha), (x - \beta)$ はそれぞれ 0 になるので、左辺 = 右辺 = 0 が成立する。

[*3] α と β の大小関係にはこだわらない。何故なら、例え負数になっても、$\pm$ と $\mp$ が変わるだけで、式の意味に影響が無いから。

なのだ。
さて、$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ は $b=-a(\alpha+\beta)$ より $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{b}{2a}$ だが、$\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ はどうだろうか。
重要なテクニックとして、以下の物がある[*4]。

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$$
$$(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$$

上を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\beta}{2}&=\frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}{2}\\&=\frac{\sqrt{(\frac{b}{a})^2-4\frac{c}{a}}}{2}\\&=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{aligned}$$

となる[*5]。以上より、

$$\begin{aligned}x&=\frac{\alpha+\beta}{2}\pm\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2a}\\&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{aligned}$$

ここで、$2b'=b$ とすると、

$$\begin{aligned}x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}\\&=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}\\&=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\end{aligned}$$

1.3 判別式

判別式とは、$D=b^2-4ac$ または $D=b'^2-ac(2b'=b)$ で現される式のことであるが、これは一体何だろうか。ほとんどの人は気付いているだろうが、解の公式のルートの中身である。

何故ルートの中身が判別式という形で特別扱いされるのだろうか。例えば、$D>0$ のとき、ルート全体は正となる。このとき、ルートの前に $\pm$ が存在するから、式は $x=\dfrac{-b'+\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ と $x=\dfrac{-b'-\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ の 2 つに分解される。つまり、解が 2 つあるということだ。

[*4] 展開してから計算し、因数分解すれば求められる。確認は各自で。
[*5] 2 行目から 3 行目へは、分母と分子に $a(=\sqrt{a^2})$ をかけた。

$D=0$ のときは $\sqrt{0}=0$ なのだから、$x=-\frac{b}{2a}$[*6]

問題は $D<0$ のときだ。ルートの中身というのは、そのルート全体を 2 乗したときの値なのだが、一般に、2 乗して負数にする値は存在しない。虚数という概念を導入することで、2 乗して負数になる数が存在するようになるのだが、普通問題で聞かれるのは “実数解”、つまり実数の解のことだから、虚数解は気にする必要がない。だから、ルートの中身が 0 未満になるということはあってはいけないことなのだ。なので、$D<0$ のときには実数解は存在しない、となる。

2 次関数のグラフを思い浮かべて貰いたい（図を用意するのが億劫なので）のだが、2 次関数を $f(x)$ とすると、$y=f(x)$ というグラフが描ける。ここまで延々とやってきたのは、$f(x)=0$ の解、つまり $f(x)=0$ を満たす x の値である。つまり、グラフに置いて、実数解の個数とは、2 次関数が x 軸を何回通るか、ということなのだ[*7]。

2 問題の解き方

勿論だが、網羅することはできないので、概念的な話をする。

2.1 解の個数

例えば、2 つの関数 $y=f(x), y=g(x)$（2 次以下）を並べて、これらの関数が交わるか接するか交わらないかを問うような問題について。当たり前だが、2 つの関数が交わる、あるいは接するということは、その交わる（接する）点を、双方の関数が通過するということだ。

つまり、y が等しいと仮定したとき、x も等しい箇所が何ヶ所できるかを求めれば良い。ここで判別式を使う。

y を等しいと仮定したのだから、$f(x)=y=g(x)$ として、$f(x)=g(x)$ とできる。これを整理すると $f(x)-g(x)=0$ となり、これの解を求める。交わるかどうか、というのは解の個数が分かれば判別できるので、判別式を用いて判定する。座標が必要な場合は、解の公式で x の解を求め、それを交点として $f(x)$ か $g(x)$ に代入して y を求める。

[*6] これが軸の式である。軸の式は重解（解が重複すること）のときの接点（つまり頂点）の x 座標を現す。
[*7] 勿論、$f(y)$ ならば y 軸を通る回数になる。